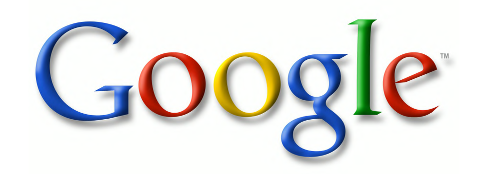
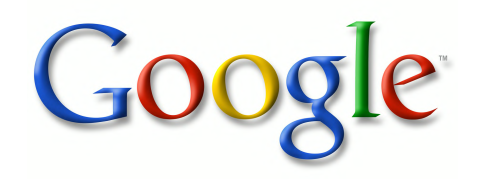
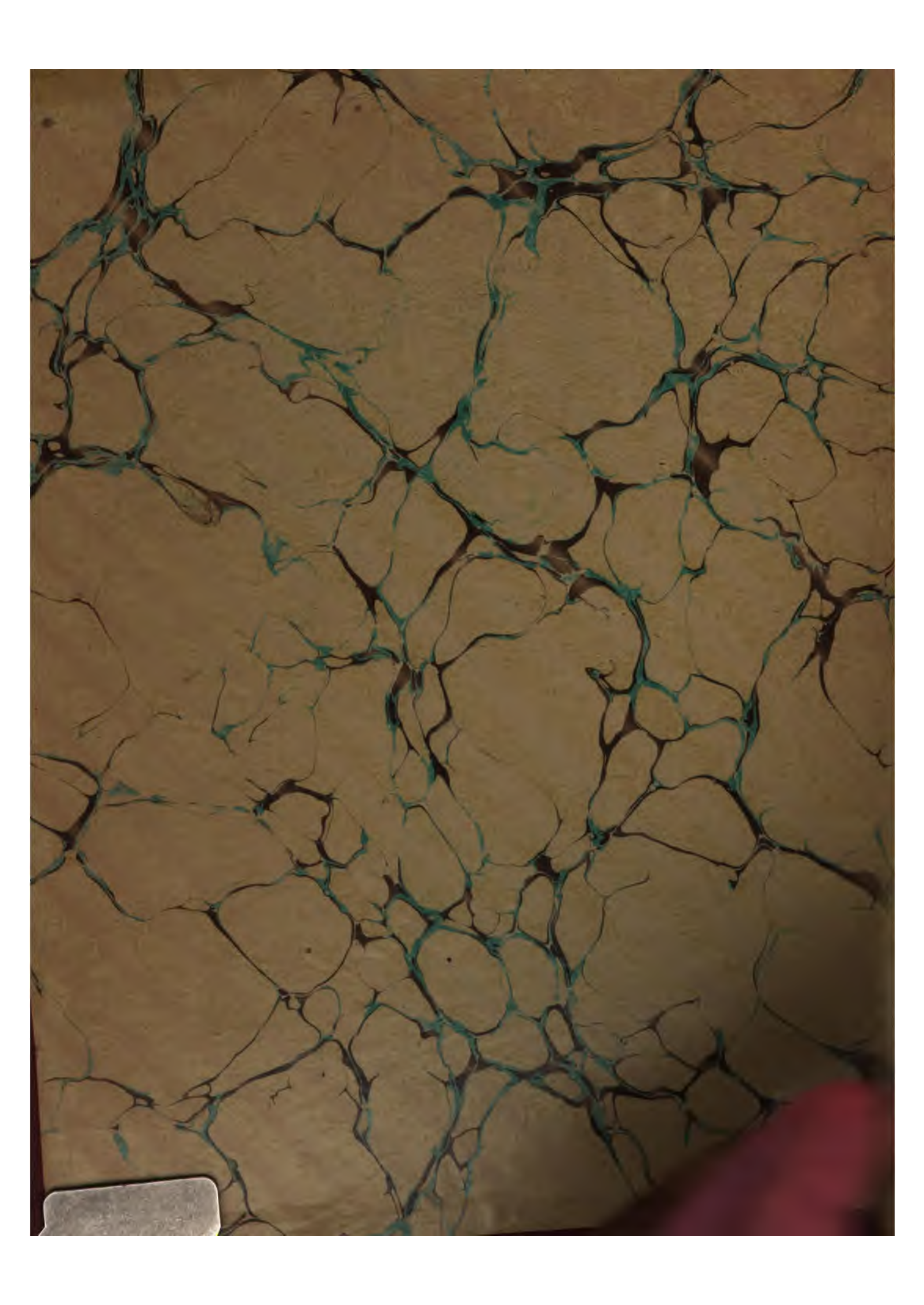
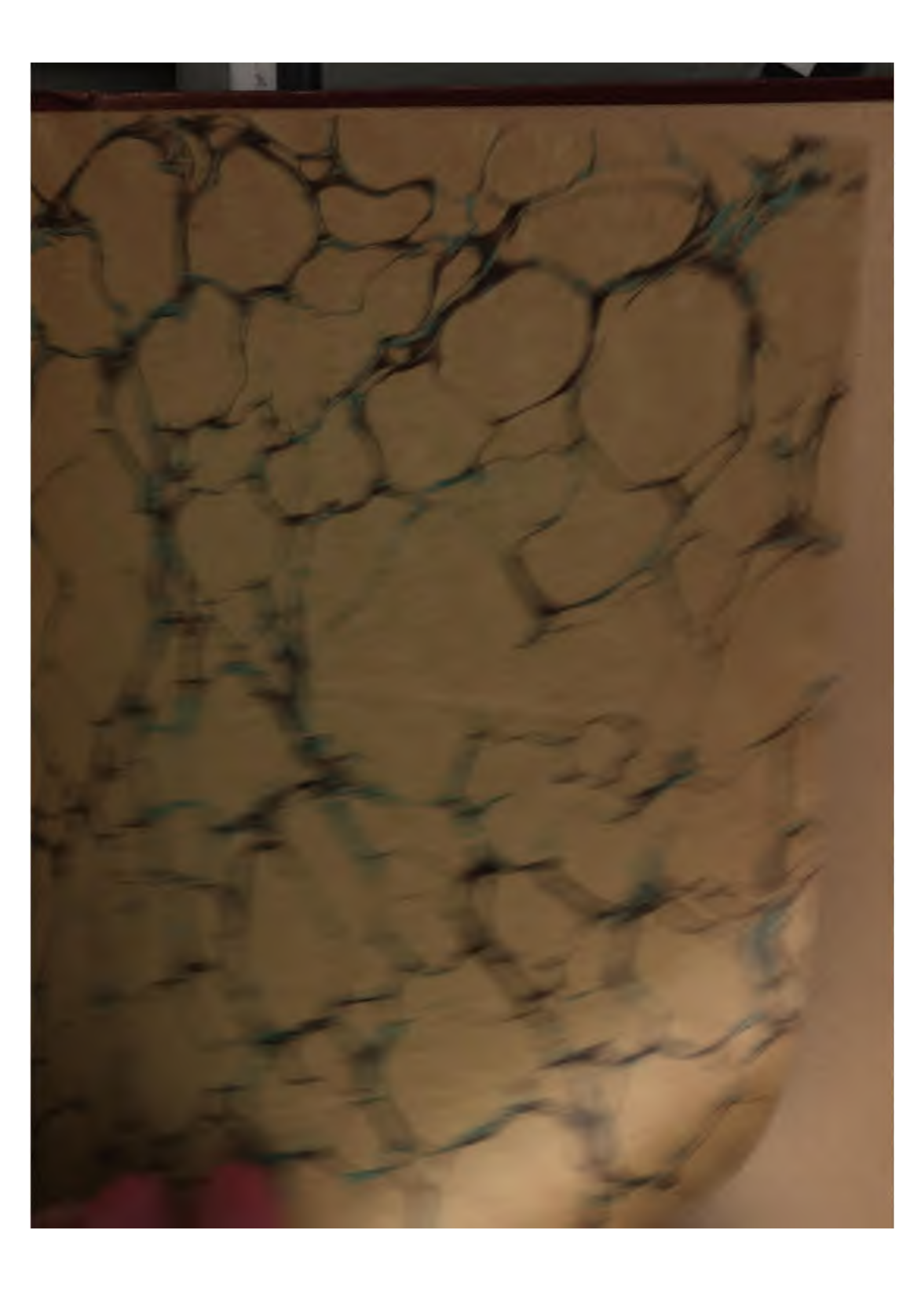










JOURNAL

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

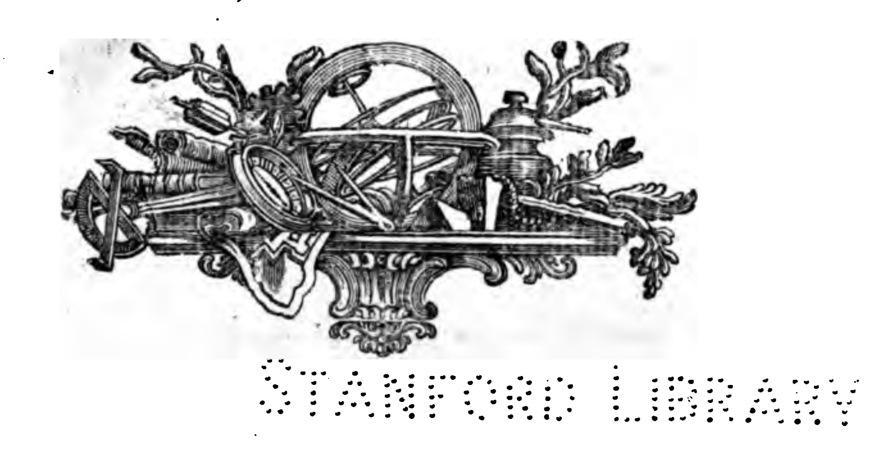
PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

DIX-HUITIÈME CAHIER.

TOME XI.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Janvier 1820.



JOURNAL
DE L'ÉCOLE ROYALE
POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Contenant l'Application de la Théorie exposée dans le XVII.ᵉ Cahier du Journal de l'École polytechnique, à l'Intégration des Équations aux Différentielles partielles du premier et du second ordre;

PAR M. AMPÈRE.

§. I.er

APPLICATION AU PREMIER ORDRE.

L'INTÉGRALE des équations aux différentielles partielles du premier ordre ne contenant qu'une seule fonction arbitraire, il est inutile d'examiner en particulier le cas où cette fonction est composée d'une seule de ces deux variables, x ou y, puisque, si cela arrivait, la dérivée de z relative à cette variable manquant nécessairement dans l'équation

donnée d'après ce qui a été dit dans le §. III, on n'aurait qu'à intégrer cette équation comme si elle était aux différentielles ordinaires entre les deux autres variables, et remplacer la constante arbitraire par une fonction arbitraire de la variable considérée comme constante dans cette intégration. Il ne reste donc que deux cas à examiner : celui où les dérivées p, q, sont hétérogènes à l'intégrale, et celui où elles lui sont homogènes.

On reconnaîtra le premier cas en formant les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., en tirant la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ de l'une d'elles, et en substituant dans toutes les autres, pour voir si cette substitution les rend identiques à la proposée. Lorsque cela arrive, on a deux valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, égales entre elles en vertu de cette équation.

Ces valeurs étant données par les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., qui ne peuvent contenir que x, y, z, $\frac{dy}{dx(\alpha}$, $\frac{dz}{dx(\alpha}$, avant que $\frac{dz}{dx(\alpha}$ y ait été remplacé par $p+q\frac{dy}{dx(\alpha}$, on aura deux équations entre ces cinq quantités, qu'on pourra considérer comme aux différentielles ordinaires entre les trois variables x, y, z, pourvu que, dans le système de deux équations avec deux constantes arbitraires, qui en représente l'intégrale, on remplace ces deux constantes, l'une par α, et l'autre par $\phi\,\alpha$. Ainsi écrit, ce système sera l'intégrale complète de l'équation proposée.

Si l'on représente ces deux équations par $V=0$ et par $V'=0$, V et V' étant des fonctions de x, y, z, α, $\phi\,\alpha$, et qu'on suppose

$$dV=H\,dx+K\,dy+L\,dz+M\,d\alpha+N\,d\phi,$$
$$dV'=H'\,dx+K'\,dy+L'\,dz+M'\,d\alpha+N'\,d\phi,$$

on aura, en différenciant ces quatre équations,

$$H + Lp + (M + N\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} = 0,$$

$$K + Lq + (M + N\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dy(x} = 0,$$

$$H' + L'p + (M' + N'\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} = 0,$$

$$K' + L'q + (M' + N'\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dy(x} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{H + Lp}{K + Lq} = \frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}} = \frac{H' + L'p}{K' + L'q},$$

c'est-à-dire

$$HK' - H'K + (K'L - KL')p + (HL' - H'L)q = 0,$$

d'où il reste à éliminer α et $\varphi\alpha$ au moyen des deux équations $V = 0$ et $V' = 0$: les valeurs de α et de $\varphi\alpha$ données par ces équations ne pouvant contenir que x, y, z, on aura pour chacune de ces valeurs une équation de la forme $Pp + Qq + R = 0$, où p et q n'entreront qu'au premier degré ; et l'équation donnée, supposée délivrée de fractions et de radicaux, sera le produit de toutes ces équations. Les valeurs de p et de q ne peuvent donc être hétérogènes à l'intégrale qu'autant que l'équation donnée est décomposable en facteurs de cette forme ; mais on n'a aucun moyen général de faire cette décomposition, dès que l'équation algébrique qu'il faudrait résoudre pour cela est d'un degré plus élevé que le quatrième ; et cependant la méthode qu'on donne ordinairement suppose cette décomposition. Celle que je viens d'exposer n'a pas le même inconvénient, puisqu'un calcul de simple élimination fait connaître si les valeurs de p et de q sont hétérogènes à l'intégrale, et donne en même temps les deux équations aux différentielles ordinaires délivrées de fractions et de radicaux ; équations qu'on pourra, le plus souvent, intégrer sans les résoudre, soit par la différenciation, soit par d'autres moyens.

Il est à remarquer que les solutions particulières de ces équations donneront des solutions particulières de l'équation qu'on se propose d'intégrer : le moyen le plus simple pour distinguer ces solutions des intégrales particulières de l'équation, lorsque l'on connaît l'intégrale générale, consiste à tirer de l'équation ainsi obtenue et de l'intégrale générale les valeurs de $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}$ et de $\frac{\frac{d\varphi\alpha}{dx(y}}{\frac{d\varphi\alpha}{dy(x}}$. Si ces valeurs sont égales, on n'aura qu'une intégrale particulière ; si elles ne le sont pas, $\varphi\,\alpha$ ne sera plus dans ce cas une fonction de α, et l'équation trouvée sera une solution particulière. Soit, par exemple, l'équation

$$(p+1)(q+1)z=(p+1)^2x+(q+1)^2y,$$

Comme elle n'est que du second degré relativement à p et à q, et qu'on peut la décomposer, en la résolvant par rapport à $\frac{p+1}{q+1}$, en deux facteurs de la forme

$$Pp+Qq+R=0,$$

il suffirait d'intégrer un de ces facteurs et de le délivrer de radicaux pour avoir l'intégrale cherchée. Mais on pourra la trouver, sans résoudre l'équation donnée, de la manière suivante. La substitution des valeurs de p et de q donne, après qu'on a égalé à zéro les coefficiens de chaque puissance de $\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, ces trois équations :

$$z\frac{dz}{dx(\alpha}+z-x\left(\frac{dz}{dx(\alpha}\right)^2-2x\frac{dz}{dx(\alpha}-x-y=0,$$

$$z\frac{dz}{dx(\alpha}-z\frac{dy}{dx(\alpha}+z+2x\frac{dz}{dx(\alpha}\frac{dy}{dx(\alpha}+2x\frac{dy}{dx(\alpha}-2y=0,$$

$$z\frac{dy}{dx(\alpha}+x\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2+y=0,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} z\left(\frac{dz}{dx(a}+1\right)-x\left(\frac{dz}{dx(a}+1\right)^2-y=0; \\ z\left(\frac{dz}{dx(a}+1\right)-z\frac{dy}{dx(a}+2x\frac{dy}{dx(a}\left(\frac{dz}{dx(a}+1\right)-2y=0, \\ z\frac{dy}{dx(a}+x\left(\frac{dy}{dx(a}\right)^2+y=0, \end{array}\right\}[A]$$

En retranchant la première de la somme des deux autres, on a

$$x\left(\frac{dy}{dx(a}+\frac{dz}{dx(a}+1\right)^2=0,$$

qui ne peut être satisfaite qu'autant que

$$\frac{dy}{dx(a}+\frac{dz}{dx(a}+1=0:$$

on en tire

$$\frac{dy}{dx(a}=-\frac{p+1}{q+1};$$

et, par conséquent,

$$\frac{dz}{dx(a}+1=p+q\frac{dy}{dx(a}+1=\frac{p+1}{q+1},$$

ces valeurs, substituées dans les équations [A], les rendent toutes trois identiques à la proposée : il ne s'agit donc plus que d'intégrer

$$\frac{dy}{dx(a}+\frac{dz}{dx(a}+1=0,$$

et

$$z\frac{dy}{dx(a}+x\left(\frac{dy}{dx(a}\right)^2+y=0.$$

En différenciant la seconde équation, après l'avoir divisée par $\frac{dy}{dx(a}$, on obtient

$$\frac{dz}{dx(a}+\frac{dy}{dx(a}+x\frac{d^2y}{dx^2(a}+1-\frac{y\frac{d^2y}{dx^2(a}}{\left(\frac{dy}{dx(a}\right)^2}=0,$$

cette équation se réduit, à cause de

$$\frac{dz}{dx(\alpha} + \frac{dy}{dx(\alpha} + 1 = 0, \quad \text{à} \quad \left[x\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - y\right]\frac{d^2y}{dx^2(\alpha} = 0.$$

le second facteur donne

$$\frac{dy}{dx(\alpha} + \alpha = 0,$$

ou

$$y + \alpha x = \phi\,\alpha;$$

mais nous avons trouvé

$$\frac{p+1}{q+1} = -\frac{dy}{dx(\alpha} = \alpha,$$

et on tire de l'équation donnée

$$z = \frac{p+1}{q+1}x + \frac{q+1}{p+1}y:$$

l'intégrale générale est donc représentée par le système des deux équations

$$y + \alpha x = \phi\,\alpha,$$

$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha}.$$

Il serait aisé d'éliminer α en laissant à la fonction arbitraire toute sa généralité; mais on introduirait des radicaux dans l'intégrale; et cette opération, qui n'est possible dans cet exemple que parce que α n'entre qu'au second degré dans

$$\alpha^2 - \frac{z}{x}\alpha + \frac{y}{x} = 0,$$

ne peut s'effectuer en général. La seule forme qu'on puisse regarder comme commune à toutes les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier ordre, lors même qu'elles peuvent être décomposées en facteurs tels que $Pp + Qq + R = 0$, est celle d'un

système de deux équations entre x, y, z, α, $\varphi\,\alpha$. La seule différence qu'il y ait entre les intégrales de ces équations et celles des équations qui ne sont pas décomposables en facteurs de cette forme, consiste en ce que les premières étant données par l'intégration de deux équations du premier ordre aux différentielles ordinaires, elles ne peuvent contenir que α et $\varphi\,\alpha$, parce que cette intégration n'introduit dans le calcul que deux constantes arbitraires, tandis que les secondes sont données par l'intégration de trois équations du premier ordre dont l'intégration introduit dans le calcul trois constantes arbitraires, ainsi que nous le verrons tout-à-l'heure. Ces intégrales doivent être remplacées par α, $\varphi\,\alpha$ et une fonction de α dérivée de $\varphi\,\alpha$, telle que $\varphi'\,\alpha$, ou une combinaison quelconque de α, $\varphi\,\alpha$ et $\varphi'\,\alpha$; c'est pourquoi l'intégrale de l'équation cherchée contient $\varphi'\,\alpha$ dans ce dernier cas.

L'autre facteur de l'équation

$$\left[x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 - y\right]\frac{d^2y}{dx^2(\alpha} = 0,$$

donne

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \pm\sqrt{\frac{y}{x}},$$

d'où il suit que

$$\frac{p+1}{q+1} = \mp\sqrt{\frac{y}{x}},$$

et que

$$z = \mp 2\sqrt{xy}.$$

Il est aisé de voir que les valeurs

$$p = \mp\sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad q = \mp\sqrt{\frac{x}{y}},$$

résultant de cette équation, donnent

$$\frac{p+1}{q+1} = \mp\sqrt{\frac{y}{x}},$$

et satisfont, par conséquent, à l'équation donnée.

Pour savoir si cette valeur de z est une intégrale particulière ou une solution particulière, on la substituera dans

$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha},$$

ce qui donnera

$$\alpha x + \frac{y}{\alpha} = \mp 2\sqrt{xy},$$

ou

$$\alpha^2 \pm 2\alpha\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = 0,$$

ainsi

$$\alpha = \mp\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \text{et} \quad \varphi\,\alpha = y + \alpha x = y \mp \sqrt{xy},$$

on tire de la valeur de α

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}} = -\frac{y}{x};$$

et de celle de $\varphi\,\alpha$

$$\frac{\frac{d\varphi\,\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\varphi\,\alpha}{dy\,(x}} = \frac{\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y}{x \mp 2\sqrt{xy}},$$

Ces deux valeurs n'étant pas égales, la valeur de $\varphi\,\alpha$ ne saurait être une fonction de celle de α, et l'équation $z = \mp 2\sqrt{xy}$ est une solution particulière.

Lorsque, après avoir formé les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c. il

il arrive que la valeur $\frac{dy}{dx(\alpha}$ tirée d'une de ces équations et substituée dans les autres ne les rend pas identiques à la proposée, il s'ensuit qu'il faut que les valeurs de p et de q, tirées de l'intégrale, soient homogènes à cette intégrale pour qu'elle puisse être générale, et les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., n'ont plus lieu séparément. Il faut, dans ce cas, différencier par rapport à y l'équation donnée que je suppose représentée par $V=0$, ce qui donne

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)q+\left(\frac{dV}{dp}\right)s+\left(\frac{dV}{dq}\right)t=0;$$

et après avoir substitué

$$\frac{dq}{dx(\alpha}-\frac{dy}{dx(\alpha}\,\frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$$

à la place de s, et $\frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ à la place de t, on formera les deux équations

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)q+\left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{dq}{dx(\alpha}=0,$$

et

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{dy}{dx(\alpha}-\left(\frac{dV}{dq}\right)=0.$$

Ces formules sont celles dont on se sert pour intégrer les équations aux différentielles partielles du premier ordre. Je ne les rappelle ici que pour montrer comment elles résultent des considérations précédentes, et pour ajouter à la théorie de cette intégration quelques observations.

1.° Si on remet dans la première de ces équations à la place de

$\frac{dq}{dx(\alpha}$ sa valeur $s + t\frac{dy}{dx(\alpha}$ et qu'on y remplace ensuite $\frac{dy}{dx(\alpha}$, par sa valeur tirée de la seconde, on aura précisément l'équation

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)q + \left(\frac{dV}{dp}\right)s + \left(\frac{dV}{dq}\right)t = 0$$

obtenue en différenciant l'équation donnée par rapport à y; cette identité prouve que les valeurs de r, s, t, tirées de l'intégrale, peuvent être hétérogènes à cette intégrale sans qu'elle cesse d'être générale, et montre en même temps qu'un système d'équation primitive qui satisfera aux deux équations entre lesquelles nous avons éliminé $\frac{dy}{dx(\alpha}$, satisfera aussi à la dérivée par rapport à y de l'équation donnée, et en serait l'intégrale générale, si elle ne donnait d'ailleurs aucune autre relation entre x, y, z, p, q, r, s, t; mais ce n'est pas cette intégrale générale qu'on cherche, c'est un de ces cas particuliers qui donnent en même temps, entre x, y, z, p, q, l'équation $V = 0$; il faut donc restreindre la généralité de ces deux équations de manière à satisfaire à cette condition, et c'est ce qu'on fait dans le procédé qu'on suit ordinairement en les combinant avec l'équation $V = 0$ et avec l'équation $\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha}$; par ce moyen on a quatre équations entre les six quantités α, x, y, z, p, q, et des dérivées du premier ordre. Comme ces dérivées sont toutes relatives à x, α étant considéré comme constant, on peut les intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, en remplaçant par α et des fonctions de α les constantes introduites par l'intégration.

2.° Comme, parmi ces quatre équations, en vertu desquelles y, z, p, q sont fonctions de x et de α, il y en a trois qui contiennent des différentielles du premier ordre, l'intégrale qui se réduira à un système de deux équations après qu'on aura éliminé p et q, contiendra trois constantes arbitraires, dont une devra être remplacée par α, et les deux autres par des fonctions de α; mais ces deux fonctions devront dé-

pendre l'une de l'autre, quoique les quatre équations d'où l'on part soient satisfaites en les laissant indépendantes, puisque les différentiations par lesquelles on pourrait les vérifier ne sont relatives qu'à x, et qu'ainsi α et ses fonctions sont considérées comme des constantes dans ces différentiations. Ces quatre équations ne contiennent donc pas toutes les conditions de la question, et, tant qu'on les considère seules, on arrive nécessairement à un résultat trop général. On sait que M. *Delagrange*, en donnant la théorie générale des équations aux différentielles partielles du premier ordre, a résolu cette difficulté par des considérations qui établissent une relation entre les deux fonctions de α, et qu'on l'évite dans la pratique en ne calculant qu'une des deux équations dont l'intégrale doit être composée, et en y joignant la dérivée de cette intégrale prise par rapport à α seul. Mais ce dernier procédé ne réussit que dans le cas où l'équation qu'on calcule satisfait seule à l'équation proposée, lorsqu'on y laisse des constantes à la place de α et de ses fonctions, ce qui n'arrive pas toujours; en sorte que l'on n'est sûr d'avoir une intégrale en l'employant, qu'autant qu'on a vérifié cette intégrale. Cette méthode n'est donc qu'une sorte de tâtonnement; au lieu que tirant des quatre équations sur lesquelles on opère, les deux équations entre x, y, z, α et les fonctions de α qui résultent de l'élimination de p et de q, on a toujours une intégrale complète de la proposée, pourvu qu'on établisse entre les deux fonctions de α la relation qui doit exister entre elles, pour qu'on ait non-seulement les quatre équations d'où l'on est parti et qui ont lieu entre les dérivées relatives à x seul, mais encore les équations qu'on trouve en même temps, et qui contiennent aussi des dérivées relatives à α. Ces dernières sont:

$$p \frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{dz}{dx(\alpha} \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha} \frac{dz}{d\alpha(x},$$

$$q \frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{dz}{d\alpha(x};$$

$$\frac{dp}{d\alpha(x} = \frac{dq}{dx(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha} \cdot \frac{dq}{d\alpha(x}.$$

Ces équations étant au nombre de trois, il semble d'abord qu'on en ait deux de trop, puisqu'il n'en faut qu'une pour déterminer la relation entre les deux fonctions de α par lesquelles on a remplacé deux des constantes arbitraires. Mais il est aisé de voir que ces trois équations se réduisent à une seule en vertu de l'équation $\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha}$, qui est une des quatre qu'on a intégrées en les considérant comme étant aux différentielles ordinaires, en sorte qu'elles donneraient nécessairement la même relation entre les deux fonctions de α contenues dans les intégrales, deux d'entre elles ne faisant qu'exprimer autrement que la troisième cette même relation. On pourra donc se servir de celle qu'on voudra des trois pour l'établir, et on sera sûr que les deux autres sont par-là même satisfaites.

Il suffit en effet de combiner l'équation

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha},$$

avec l'une de ces deux-ci :

$$p\frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{dz}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha}\,\frac{dz}{d\alpha(x},$$

$$q\frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{dz}{d\alpha(x},$$

pour trouver l'autre ; et lorsqu'on la différencie par rapport à α, ce qui donne

$$\frac{d^2z}{dx\,d\alpha} = \frac{dp}{d\alpha(x} + \frac{dq}{d\alpha(x}\,\frac{dy}{dx(\alpha} + q\frac{d^2y}{dx\,d\alpha}$$

et qu'on égale cette valeur à celle de $\frac{d^2z}{dx\,d\alpha}$ tirée de

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = q\frac{dy}{d\alpha(x}, \text{ qui est } \frac{d^2z}{dx\,d\alpha} = \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha(x} + q\frac{d^2y}{dx\,d\alpha}.$$

on trouve la troisième équation

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha} \; \frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha} \; \frac{dq}{d\alpha\,(x} :$$

Après avoir déterminé la relation entre les deux fonctions de α au moyen de celle de ces trois équations qu'on jugera devoir la donner plus aisément dans chaque cas particulier, on aura toujours une intégrale de la proposée exprimée par un système de deux équations, de quelque manière qu'on élimine p et q, des quatre équations obtenues avec les trois constantes arbitraires, qu'on a remplacées par α et deux fonctions de α, et il n'y aura plus lieu à établir la distinction que fait le célèbre auteur des Leçons sur le calcul des fonctions, à la *page 395* de cet ouvrage, entre les équations résultant de l'élimination de p et de q qui satisfont à la proposée en y supposant toutes les arbitraires constantes, et celles qui n'y satisfont pas dans la même supposition, puisque les unes et les autres expriment également, combinées deux à deux, des intégrales de la proposée, après qu'on y a remplacé ces arbitraires par leurs valeurs en α et $\varphi\,\alpha$.

Pour ne laisser aucun doute sur ce sujet, il suffit de discuter d'après les considérations précédentes le système d'équation donné dans l'ouvrage que je viens de citer, pour représenter les relations entre x, y, z, p, q et trois constantes arbitraires dont on doit tirer l'intégrale de l'équation que l'auteur a choisie pour exemple.

Ce système se compose des quatre équations

$$\begin{aligned} z &= p\,q, \\ y &= p + a, \\ z &= b\,p^2; \\ x &= b\,p + c, \end{aligned}$$

où a, b, c sont les trois constantes arbitraires, en les remplaçant par

$\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, et $-\alpha$, on a.

$$z = pq,$$
$$y = p + \varphi\alpha,$$
$$z = p^2\,\psi\alpha,$$
$$x + \alpha = p\,\psi\alpha.$$

comme q n'entre que dans la première de ces quatre équations, p reste seul à éliminer entre les trois autres; et il faut faire voir que, de quelque manière qu'on fasse cette élimination, les deux équations délivrées de p et de q qui en résultent expriment toujours l'intégrale de la proposée. Commençons par établir la relation entre $\varphi\alpha$ et $\psi\alpha$, déduite d'une des trois équations données ci-dessus pour cette détermination,

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

par exemple. Pour cela on prendra d'abord les valeurs de z, q et y en x, α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$; savoir :

$$z = \frac{(x+\alpha)^2}{\psi\alpha};$$
$$q = x + \alpha$$
$$y = \frac{x+\alpha}{\psi\alpha} + \varphi\alpha,$$

et en les substituant dans

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

il viendra

$$2(x+\alpha)\,\psi\alpha - (x+\alpha)^2\,\psi'\alpha = (x+\alpha)\,[\psi\alpha - (x+\alpha)\,\psi'\alpha + \varphi'\alpha\,\psi\alpha^2]$$

ou

$$(x+\alpha)\,\psi\alpha = (x+\alpha)\,\varphi'\alpha\,\psi\alpha^2,$$

ainsi

$$\psi\, a = \frac{1}{\varphi' a},$$

et les trois équations entre lesquelles il faut éliminer p deviennent

$$y = p + \varphi\, a,$$
$$z = \frac{p^2}{\varphi' a},$$
$$x + a = \frac{p}{\varphi' a};$$

en éliminant p entre les deux premières, on a

$$z = \frac{(y - \varphi\, a)^2}{\varphi' a},$$

qui, en effet, ne satisferait pas à la proposée en y faisant a constant, mais qui y satisfait en laissant a variable, comme il l'est effectivement, et la combinant avec la troisième équation, qui devient alors

$$x + a = \frac{y - \varphi\, a}{\varphi' a};$$

car il est aisé de vérifier que le système de ces deux équations donne $z = p\, q$, équation dont il exprime par conséquent l'intégrale primitive.

Si l'on élimine p entre la seconde et la troisième équation, on a

$$z = (x + a)^2\, \varphi' a$$

qui ne vérifie pas l'équation $z = p\, q$, quand on n'y fait pas varier a, mais qui n'en compose pas moins avec la première équation changée, par la même valeur de p, en

$$y = (x + a)\, \varphi' a + \varphi\, a$$

l'intégrale primitive de $z = p\, q$, puisqu'il est aisé de vérifier que le système de ces deux valeurs de z et de y, donne en effet cette der-

nière équation. L'élimination de p entre la première et la troisième équation conduit au même résultat, car on a d'abord

$$y=(x+a)\,\varphi' a+\varphi a,$$

qu'il faut combiner avec la seconde équation, qui devient

$$z=(x+a)^2\,\varphi' a,$$

en vertu de la valeur de p tirée de la troisième.

La circonstance particulière d'une équation résultant de l'élimination de p, qui satisfasse à la proposée en y supposant a constant, ne fait rien à la nature de l'intégrale; c'est un résultat en quelque sorte accidentel, quoiqu'on puisse y parvenir dans toutes les intégrales, ainsi que je le démontrerai ci-après, en combinant d'une certaine manière les trois équations entre lesquelles p doit être éliminé, et, en effet, a, $\varphi\, a$, $\psi\, a$, ne sont pas réellement des constantes, parce qu'elles sont introduites dans le calcul par l'intégration d'équations qui ne sont pas réellement aux différentielles ordinaires, mais qui seulement sont susceptibles d'être traitées comme telles à cause qu'étant aux différentielles partielles par rapport aux deux variables indépendantes x et a, elles ne contiennent que des dérivées relatives à x. Dans l'exemple que nous discutons, il faut, pour trouver un résultat de ce genre, changer d'abord, comme on le voit dans les Leçons sur la théorie des fonctions, la troisième équation en $x+a=\frac{z}{p}$, et y substituer la valeur de p tirée de la première, ce qui donne

$$z=(x+a)\,(y-\varphi\, a),$$

qui doit être combiné avec le résultat de l'élimination de p entre la première et la troisième, savoir :

$$y=(x+a)\,\varphi' a+\varphi\, a.$$

On voit que si, dans ce cas, la valeur de z satisfait à la proposée en y regardant a et $\varphi\, a$ comme deux constantes, c'est uniquement parce

que cette dernière équation, qu'on peut écrire ainsi,

$$y - \varphi\alpha - (x + \alpha)\,\varphi'\alpha = 0;$$

est la dérivée partielle de l'équation

$$z = (x + \alpha)(y - \varphi\alpha),$$

en n'y faisant varier que α, ce qui fait disparaître

$$\frac{d\alpha}{dx(y} \text{ et } \frac{d\alpha}{dy(x}$$

des valeurs de p et de q, qu'on en tirerait en la différenciant successivement par rapport à x et par rapport à y, précisément comme si α et $\varphi\alpha$ étaient remplacées par deux constantes.

Mais lorsque cette circonstance n'a pas lieu, l'équation donnée n'est plus vérifiée par la supposition de α constant, parce qu'elle doit résulter non de la suppression des termes en $\frac{d\alpha}{dx(y}$ et $\frac{d\alpha}{dy(x}$, qui ne s'en vont point alors, mais de l'élimination de ces deux dernières quantités de α et de ses fonctions, entre les deux équations dont se compose l'intégrale, et les quatre équations qu'on en tire en les différenciant successivement par rapport à x et à y. Ainsi les deux équations

$$y = (x + \alpha)\,\varphi'\alpha + \varphi\alpha,$$
$$z = (x + \alpha)^2\,\varphi'\alpha,$$

donnent d'abord

$$0 = \varphi'\alpha + \frac{d\alpha}{dx(y}\left[2\varphi'\alpha + (x + \alpha)\,\varphi''\alpha\right],$$
$$1 = \frac{d\alpha}{dy(x}\left[2\varphi'\alpha + (x + \alpha)\,\varphi''\alpha\right],$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dx(y} = -\frac{\varphi'\alpha}{2\varphi'\alpha + (x + \alpha)\,\varphi''\alpha},$$
$$\frac{d\alpha}{dy(x} = \frac{1}{2\varphi'\alpha + (x + \alpha)\,\varphi''\alpha},$$

et ensuite

$$p = 2(x+\alpha)\varphi'\alpha + \frac{d\alpha}{dx\,(y}\left[2(x+\alpha)\varphi'\alpha + (x+\alpha)^2\varphi''\alpha\right] = (x+\alpha)\varphi'\alpha,$$

$$q = \frac{d\alpha}{dy\,(x}\left[2(x+\alpha)\varphi'\alpha + (x+\alpha)^2\varphi''\alpha\right] = x+\alpha,$$

En tirant de ces deux équations les valeurs de $x+\alpha$ et de $\varphi'\alpha$, savoir :

$$x+\alpha = q,$$
$$\varphi'\alpha = \frac{p}{q},$$

et les substituant dans $z = (x+\alpha)^2\varphi'\alpha$, on trouve précisément l'équation à vérifier $z = pq$.

Au lieu d'employer l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

pour trouver la relation qui fait dépendre l'une des deux fonctions de α de l'autre, on aurait pu se servir de

$$p\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \frac{dz}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dz}{d\alpha\,(x},$$

ou de

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dq}{d\alpha\,(x};$$

il est aisé de vérifier qu'on aurait trouvé de même

$$\psi.\alpha = \frac{1}{\varphi'\alpha};$$

c'est même en partant de

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dq}{d\alpha\,(x};$$

qu'on aurait trouvé cette relation de la manière la plus simple dans

l'exemple actuel, où

$$y = \frac{x + \alpha}{\psi \alpha} + \varphi \alpha;$$

$$p = \frac{x + \alpha}{\psi \alpha},$$

$$q = x + \alpha,$$

C'est d'ailleurs cette dernière formule qu'il convient toujours d'employer quand z n'entre pas dans l'équation donnée, parce qu'alors on ne doit opérer que sur les trois équations

$$V = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) q + \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{dq}{dx(\alpha} = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{dy}{dx(\alpha} - \left(\frac{dV}{dq}\right) = 0,$$

qui donnent y, p, et q en fonctions de x, α, $\varphi\,\alpha$, $\psi\,\alpha$; et la valeur de $\psi\,\alpha$ se déterminera immédiatement en employant celle des trois formules d'où l'on peut le déduire, qui ne contient pas z.

y, p et q étant alors connus en fonctions de x, α, $\varphi\,\alpha$ et $\varphi'\,\alpha$, on aura z en intégrant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

relativement à x et à α considérés à-la-fois comme variables, afin que cette intégration n'introduise aucune nouvelle fonction arbitraire. Cette intégration pourra d'ailleurs toujours s'exécuter, puisque l'équation

$$\frac{dp}{d\alpha(x} = \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha}\,\frac{dq}{d\alpha(x},$$

d'où l'on a tiré la valeur de α, exprime, comme nous l'avons vu, la condition d'intégrabilité de cette valeur de dz, en y considérant x et α comme les deux variables indépendantes.

Au contraire, quand l'équation donnée contient z, il faut employer

simultanément les quatre équations qui donnent y, z, p, q en fonctions de x, α, $\varphi\,\alpha$, $\psi\,\alpha$, déterminer ensuite $\psi\,\alpha$ avec l'une quelconque des trois formules dont on peut tirer la relation entre cette fonction et $\varphi\,\alpha$, et éliminer p et q pour avoir les deux équations dont se compose l'intégrale, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'intégration de la valeur de $d\,z$ pour trouver z.

Il est bien évident qu'une des deux équations de l'intégrale ne peut satisfaire à l'équation donnée, lorsqu'on y remplace α et $\varphi\,\alpha$ par des constantes, que dans le cas particulier où cette équation étant représentée par $U=0$, l'autre l'est par $\left(\frac{d\,U}{d\,\alpha}\right)=0$. Cette circonstance n'est nullement nécessaire pour que l'intégrale vérifie l'équation ; et, parmi un grand nombre de formes qu'on peut donner à l'intégrale en faisant l'élimination de différentes manières, elle ne peut avoir lieu que dans quelques-unes de ces formes arrangées exprès : mais est-elle toujours possible ainsi que je l'ai avancé ? La solution de cette question est d'ailleurs intéressante sous le point de vue de la simplicité des intégrales et de leur application aux problèmes de la géométrie des surfaces courbes. C'est la seule chose qui me reste à faire pour compléter la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Lorsque l'intégrale d'une de ces équations est représentée par deux équations entre x, y, z et α, et des fonctions de α, on peut exprimer la même intégrale par deux autres équations obtenues en les combinant de manière que les deux nouvelles équations soient une suite des deux premières, et réciproquement. Si l'on tire de celles-ci la valeur de

$$\frac{\frac{d\,z}{d\,\alpha\,(x}}{\frac{d\,y}{d\,\alpha\,(x}},$$

qui est celle de q en fonction de x, α et des fonctions de α, et qu'on

représente cette valeur par Q, qu'on fasse ensuite $z - Q\,y = u$, qu'on substitue, par conséquent, $u + Q\,y$ au lieu de z, dans ces deux équations; qu'on élimine y, et que, dans l'équation résultant de cette opération, on écrive $z - Q\,y$ à la place de u, on aura une équation qui pourra représenter l'intégrale de la proposée, en la réunissant à une autre combinaison des deux équations dont se composait cette intégrale sous la première forme. Le système de ces deux équations donnera, par conséquent,

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = Q,$$

comme les deux premières.

Mais en représentant l'équation obtenue de la manière qui vient d'être expliquée, par

$$F\,(x,\,u,\,\alpha) = 0,$$

on trouve, en la différenciant par rapport à α,

$$\left(\frac{dz}{d\alpha(x} - Q\,\frac{dy}{d\alpha(x} - y\,\frac{dQ}{d\alpha(x}\right) F'\,(u) + F'\,(\alpha) = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = Q - \frac{F'\,(\alpha) - y\,\frac{dQ}{d\alpha(x}\,F'\,(u)}{\frac{dy}{d\alpha(x}};$$

il faudra donc, pour que cette valeur se réduise à Q, que l'autre équation de ce système soit équivalente à

$$F'\,(\alpha) - y\,\frac{dQ}{d\alpha(x}\,F'\,(u) = 0,$$

et l'intégrale pourra, par conséquent, être représentée par le système des deux équations

$$F\,(x,\,z - Q\,y,\,\alpha) = 0,$$

et

$$F'(\alpha) - y \frac{dQ}{d\alpha(x} F'(z - Qy) = 0;$$

dont la seconde est la dérivée partielle de la première, relativement à α seul. Non-seulement cette observation prouve que cette transformation est toujours possible, mais elle donne le moyen de l'exécuter par un simple calcul d'élimination ; puisque après avoir chassé y des deux équations où l'on a remplacé z par $u + Qy$, il suffit d'écrire dans le résultat $z - Qy$ au lieu de u, et de joindre à l'équation qui en résulte, sa dérivée partielle relative à α seul. Il est à remarquer que ce procédé s'applique également à toutes les intégrales représentées par un système de deux équations entre x, y, z, α et des fonctions de α, soit que, p et q pouvant être hétérogènes à l'intégrale, on l'obtienne au moyen de deux équations différentielles du premier ordre, et qu'elle ne puisse contenir, par conséquent, que deux constantes arbitraires remplacées par α et $\phi\,\alpha$; soit que, p et q étant nécessairement homogènes à l'intégrale, ces deux équations aient été obtenues en intégrant trois équations aux différentielles partielles, et contiennent, par conséquent, trois constantes arbitraires auxquelles on ait substitué α, $\phi\,\alpha$, et la valeur de $\psi\,\alpha$ en α et $\phi\,\alpha$, tirée de la relation existant entre $\psi\,\alpha$ et $\phi\,\alpha$. Mais, dans le premier cas, q n'étant pas homogène à l'intégrale, cette transformation introduit dans le calcul une fonction de α qui n'entrait pas dans les deux équations dont était composée l'intégrale, sous sa première forme; en sorte qu'on trouve, en général, par ce procédé, une intégrale plus compliquée que celle qu'on avait d'abord; tandis que, dans le second cas, il suit de ce qui a été démontré précédement, que la valeur de q ne contient que les mêmes fonctions qui entrent nécessairement dans l'intégrale; en sorte que, dans ce cas, on obtient en général une intégrale dont la forme est plus simple que celle de l'intégrale dont on est parti. Nous avons vu, par

exemple, que ce système de deux équations

$$y + a x = \varphi a,$$
$$z = a x + \frac{y}{a},$$

est l'intégrale de l'équation

$$(p + 1)(q + 1) z = x (p + 1)^2 + y (q + 1)^2.$$

On peut faire, pour simplifier le calcul, $\varphi a = a \psi a$, et l'intégrale devient alors

$$y = a (\psi a - x),$$
$$z = a x + \frac{y}{a} = a x + \psi a - x,$$

on en tire

$$q = \frac{\frac{d z}{d a\,(x}}{\frac{d y}{d a\,(x}} = \frac{x + \psi' a}{\psi a - x + a \psi' a};$$

valeur que nous avons représentée par Q; ainsi

$$u + \frac{(x + \psi' a) y}{\psi a - x + a \psi' a} = a x + \psi a - x,$$

et en éliminant y, et réduisant

$$u = \frac{(\psi a - x)^2 + a^2 x \psi' a}{\psi a - x + a \psi' a};$$

ce qui donne

$$z = u + Q y = \frac{(x + \psi' a) y + (\psi a - x)^2 + a^2 x \psi' a}{\psi a - x + a \psi' a},$$

qu'il suffit de combiner avec sa dérivée relative à a seul; savoir:

$$\left(\frac{d\left[\frac{(x + \psi' a) y + (\psi a - x)^2 + a^2 x \psi' a}{\psi a - x + a \psi' a}\right]}{d a}\right) = 0;$$

pour avoir l'intégrale sous la forme

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0.$$

Il est aisé de vérifier * que le système de ces deux équations satis-

---

* Pour faire cette vérification de la manière la plus simple, on tire d'abord de ces deux équations

$$q = \frac{x + \gamma'\alpha}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha},$$

$$p = \frac{y - 2(\gamma\alpha - x) + \alpha^2\gamma'\alpha}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha} + \frac{(x + \gamma'\alpha)y + (\gamma\alpha - x)^2 + \alpha^2 x\gamma'\alpha}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha}$$

ou

$$p = \frac{y + z - 2(\gamma\alpha - x) + \alpha^2\gamma'\alpha}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha}.$$

Mais on obtient, en développant la seconde des deux équations dont se compose l'intégrale,

$$y\gamma''\alpha + 2(\gamma\alpha - x)\gamma'\alpha + \alpha x(2\gamma'\alpha + \alpha\gamma''\alpha) - z(2\gamma'\alpha + \alpha\gamma''\alpha) = 0,$$

ou

$$[y - \alpha(\gamma\alpha - x)]\gamma''\alpha + (\gamma\alpha - x + \alpha x - z)(2\gamma'\alpha + \alpha\gamma''\alpha) = 0,$$

et on déduit de la valeur de z tirée de la première,

$$\gamma\alpha - x + \alpha x - z = \frac{(x + \gamma'\alpha)[\alpha(\gamma\alpha - x) - y]}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha},$$

On a donc

$$[y - \alpha(\gamma\alpha - x)]\left(\gamma''\alpha - \frac{(x + \gamma'\alpha)(2\gamma'\alpha + \alpha\gamma''\alpha)}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha}\right) = 0,$$

dont le premier facteur seul peut être nul; parce que le second, égalé à zéro, donnerait une relation entre x et α, et que ces deux quantités doivent être indépendantes pour qu'il y ait deux variables qui le soient dans l'intégrale, ainsi

$$y = \alpha(\gamma\alpha - x),$$

fait

fait en effet à la proposée; mais cette forme est évidemment plus compliquée que celle d'où l'on est parti, puisqu'il n'y entrait que x, y, z, α et $\varphi\,\alpha$, et qu'on a actuellement deux équations entre x, y, z, α, $\psi\,\alpha$, $\psi'\,\alpha$ et $\psi''\,\alpha$.

Au contraire, dans le cas où p et q sont nécessairement homogènes à l'intégrale, Q ne peut contenir que les mêmes fonctions de α que contiennent les deux équations dont se compose cette intégrale, et on peut toujours, par la méthode que je viens d'exposer, la mettre sous la forme

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

sans y introduire aucune nouvelle arbitraire. Pour achever d'éclaircir cette méthode, je l'appliquerai à l'exemple suivant.

Soit l'équation donnée $z = p + q^n$; en la différenciant par rapport

---

ce qui donne aussi

$$z = \alpha x + \psi d - x$$
$$z + y = \alpha\psi\alpha + \psi\alpha - x,$$
$$p = \frac{\alpha(\psi\alpha + \alpha\psi'\alpha) - \psi\alpha + x}{\psi\alpha - x + \alpha\psi'\alpha},$$
$$p + 1 = \frac{\alpha(\psi\alpha + \psi'\alpha + \alpha\psi'\alpha)}{\psi\alpha - x + \alpha\psi'\alpha}.$$

Et comme

$$q + 1 = \frac{\psi\alpha + \psi'\alpha + \alpha\psi'\alpha}{\psi\alpha - x + \alpha\psi'\alpha},$$

on a

$$\alpha = \frac{p+1}{q+1},\ \psi\alpha - x = \frac{y}{\alpha} = \frac{q+1}{p+1}\,y,$$

ce qui change la valeur de z en

$$z = \frac{p+1}{q+1}\,x + \frac{q+1}{p+1}\,y.$$

qui satisfait évidemment à l'équation proposée.

à y, et formant ensuite les équations $P=0$ et $Q=0$, &c., comme nous l'avons dit, on aura

$$q=\frac{dq}{dx(\alpha}, \quad \frac{dy}{dx(\alpha}=nq^{n-1},$$

d'où

$$q=\alpha e^x, y=\frac{n}{n-1}\alpha^{n-1}e^{(n-1)x}+\varphi'\alpha,$$

et

$$p=\frac{dz}{dx(\alpha}-n\alpha^n e^{nx}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation proposée, on aura

$$\frac{dz}{dx(\alpha}-z=(n-1)\alpha^n e^{nx},$$

et par conséquent

$$z=\alpha^n e^{nx}+e^x\psi\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs de y, de z et de q, l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha(x}=q\frac{dy}{d\alpha(x}$$

donnera successivement

$$\psi'\alpha=\alpha\varphi''\alpha, \quad \psi\alpha=\alpha\varphi'\alpha-\varphi\alpha;$$

l'intégrale de l'équation donnée sera donc représentée par le système des deux équations.

$$z=\alpha^n e^{nx}+e^x(\alpha\varphi'\alpha-\varphi\alpha),$$

$$y=\frac{n}{n-1}\alpha^{n-1}e^{(n-1)x}+\varphi'\alpha.$$

Si l'on veut transformer cette intégrale de manière qu'une des deux équations soit la dérivée partielle de l'autre relativement à α, il faudra en déduire la valeur de

$$u = z - \frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} y,$$

on trouvera

$$u = -\frac{1}{n-1} \alpha^n e^{nx} - c^x \varphi \alpha,$$

et par conséquent

$$z = Qy + u = \alpha e^x y - \frac{1}{n-1} \alpha^n e^{nx} - e^x \varphi \alpha;$$

cette équation, combinée avec sa dérivée partielle relative à α, qui se réduit à

$$y - \frac{n}{n-1} \alpha^{n-1} e^{(n-1)x} - \varphi' \alpha = 0,$$

représente l'intégrale de l'équation donnée sous la forme demandée.

Cette méthode donne toujours l'intégrale sous cette forme, mais elle peut être plus ou moins simple, suivant la nature de l'équation donnée. Pour l'avoir sous la forme la moins compliquée, il faut l'obtenir successivement de la manière que nous venons de dire, d'abord en faisant $u = z - Qy$, Q étant la valeur de q en fonction de x de α, puis en prenant x au lieu de y et y au lieu de x, et faisant par conséquent $v = z - Px$, P étant la valeur de p en fonctions de y et de α; on choisira ensuite entre ces deux résultats celui qui paraîtra le plus simple.

Ce procédé réussit toujours quand l'élimination est possible ; mais il peut arriver qu'il conduise à une intégrale très-compliquée, tandis qu'on en pourrait trouver une plus simple en faisant usage d'un moyen de transformation dont ce procédé n'est qu'un cas particulier, et dont je vais expliquer le principe en général.

En représentant l'une des deux équations de l'intégrale par

$$F(x, u, \alpha) = 0,$$

où z et y n'entrent que dans u, pour que l'autre équation en soit la dérivée partielle relative à α, savoir,

$$F'(\alpha) + \left(\frac{du}{d\alpha}\right) F'(u) = 0,$$

il faut que cette dernière équation, combinée avec la dérivée de la première prise en regardant x comme constant, donne

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = q \frac{dy}{d\alpha(x};$$

or cette dérivée est

$$F'(\alpha) + \left[\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{d\alpha(x} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\alpha(x} + \left(\frac{du}{d\alpha}\right)\right] F'(u) = 0;$$

il faut donc prendre u tel que

$$\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)} \text{ soit égal à } - q.$$

Quand on a la valeur Q de q qui ne contient que x et α, on satisfait à cette condition en prenant $u = z - Qy$, comme nous venons de le faire; et comme il est toujours censé qu'on peut tirer de deux équations entre x, y, z, α et des fonctions de α qui satisfont à la proposée, une valeur Q de q, qui ne contienne en effet ni y ni z, on peut regarder cette méthode comme générale; mais il sera souvent plus simple, et quelquefois nécessaire faute de pouvoir éliminer y, d'éliminer seulement z de la valeur de q, en sorte qu'il y reste x, y et α : alors en représentant cette valeur par Q', on satisferait à

$$\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)} = - q,$$

en faisant $$u = z - \int Q' dy,$$

l'intégrale $\int Q' dy$ étant prise partiellement en faisant varier y seul. En

opérant sur cette valeur de u précisément comme nous venons d'opérer sur

$$u = z - Q y,$$

qui en est un cas particulier, on obtient une autre intégrale de l'équation donnée, dont la forme est également

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

et qui peut être plus simple que celle qu'on déduirait de

$$u = z - Q y.$$

Il est aisé de voir que si la valeur de q devenait trop compliquée par l'élimination de z, ou que cette élimination fût impossible, et qu'on se bornât à exprimer en x, y, z, α et des fonctions de α cette valeur de q, que je représenterai par Q'', on arriverait encore à une intégrale de la même forme, en prenant pour u une valeur particulière satisfaisant à l'équation du premier ordre

$$\left(\frac{du}{dz}\right) + Q''\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

entre u et les deux variables indépendantes y et z, parce que x et α doivent y être considérées comme constantes. Pour achever d'éclaircir cette partie de la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles, je prendrai pour exemple l'équation

$$(z - q)^2 + p = 0;$$

je l'intégrerai d'abord en faisant usage des formules connues, et comme cette intégrale ne se trouvera pas sous la forme

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

je l'y ramenerai en me servant successivement des deux transformations $u = z - Qy$ et $u = z - \int Q'\,dy$, afin qu'on puisse comparer les résultats auxquels elles conduisent. Les valeurs de y, z, p, q en fonctions

de x et de α, doivent être déduites dans cet exemple des quatre équations

$$(z-q)^2+p=0,$$

$$2(z-q)q+\frac{dq}{dx(\alpha}=0,$$

$$2(z-q)+\frac{dy}{dx(\alpha}=0,$$

$$p+q\frac{dy}{dx(\alpha}=\frac{dz}{dx(\alpha}=\frac{dq}{dx(\alpha}-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2(\alpha},$$

dont la dernière s'obtient en différenciant la valeur de z tirée de la troisième. La seconde et la troisième donnent

$$\frac{dq}{dx(\alpha}=q\frac{dy}{dx(\alpha},$$

ce qui réduit la quatrième à

$$p=-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2(\alpha};$$

et comme on en tire aussi

$$z-q=-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx(\alpha},$$

la première devient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2-\frac{d^2y}{dx^2(\alpha}=0;$$

cette équation donne

$$\frac{y}{2}+l(-2\,\phi\,\alpha)^*=l\frac{dy}{dx(\alpha},$$

ou

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=-2\,\phi\,\alpha\,e^{\frac{y}{2}},$$

$$e^{-\frac{y}{2}}=(x+\alpha)\,\phi\,\alpha.$$

* Je donne cette forme à cette fonction arbitraire de α, pour rendre plus simples les calculs qui vont suivre.

On tire d'ailleurs de l'équation trouvée plus haut entre y et q,

$$q = e^{y} \psi \alpha = \frac{\psi \alpha}{(x+\alpha)^{2} \varphi \alpha^{2}} :$$

ces valeurs changent

$$z = q - \frac{1}{2} \frac{d y}{d x (\alpha},$$

en

$$z = \frac{\psi \alpha}{(x+\alpha)^{2} \varphi \alpha^{2}} + \frac{1}{x+\alpha},$$

qu'il faut réunir avec

$$y + 2 l [(x+\alpha) \Phi \alpha] = 0,$$

pour avoir l'intégrale, après qu'on aura déterminé la relation entre $\psi \alpha$ et $\Phi \alpha$.

On peut le faire au moyen de la formule

$$\frac{d z}{d \alpha (x} = q \frac{d y}{d \alpha (x} :$$

on a d'abord

$$\frac{d z}{d \alpha (x} = \frac{\psi' \alpha}{(x+\alpha)^{2} \varphi \alpha^{2}} - \frac{2 \psi \alpha (\varphi \alpha + (x+\alpha) \varphi' \alpha)}{(x+\alpha)^{3} \varphi \alpha^{3}} - \frac{1}{(x+\alpha)^{2}} ;$$

on trouve ensuite

$$q \frac{d y}{d \alpha (x} = - \frac{2 \psi \alpha (\varphi \alpha + (x+\alpha) \varphi' \alpha)}{(x+\alpha)^{3} \varphi \alpha^{3}},$$

et il en résulte

$$\Phi \alpha^{2} = \psi' \alpha,$$

ce qui change l'intégrale précédente en

$$z = \frac{\psi \alpha}{(x+\alpha)^{2} \psi' \alpha} + \frac{1}{x+\alpha},$$

$$y + l [(x+\alpha)^{2} \psi' \alpha] = 0.$$

Il est aisé de vérifier cette intégrale, qui n'est pas d'ailleurs de la forme

$$U = 0,$$

$$\left(\frac{d U}{d \alpha}\right) = 0,$$

en tirant de la seconde équation

$$\frac{d\alpha}{dx(y} = -\frac{2\psi'\alpha}{2\psi'\alpha + (x+\alpha)\psi''\alpha},$$

$$\frac{d\alpha}{dy(x} = -\frac{(x+\alpha)\psi'\alpha}{2\psi'\alpha + (x+\alpha)\psi''\alpha},$$

et de la première

$$p = -\frac{2\psi\alpha}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha} - \frac{1}{(x+\alpha)^2} -$$

$$\frac{\psi\alpha(2\psi'\alpha + (x+\alpha)\psi''\alpha)}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha^2}\,\frac{d\alpha}{dx(y} = -\frac{1}{(x+\alpha)^2},$$

$$q = -\frac{\psi\alpha(2\psi'\alpha + (x+\alpha)\psi''\alpha)}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha^2}\,\frac{d\alpha}{dy(x} = \frac{\psi\alpha}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha},$$

valeurs qui donnent en effet

$$(z-q)^2 = \frac{1}{(x+\alpha)^2} = -p.$$

La valeur de q que nous venons d'obtenir ne contenant que x et α, elle pourra être présentée par Q, et l'on aura

$$u = z - Qy = \psi\alpha\,\frac{1 + l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha} + \frac{1}{x+\alpha},$$

et par conséquent,

$$z = \psi\alpha\,\frac{y + 1 + l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha} + \frac{1}{x+\alpha},$$

cette équation, combinée avec sa dérivée partielle relative à α,

$$\frac{d\left[\psi\alpha\,\frac{y + 1 + l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha} + \frac{1}{x+\alpha}\right]}{d\alpha} = 0,$$

donne une intégrale de l'équation proposée sous la forme demandée ; car en faisant attention que v étant une fonction quelconque de x et de α, on a

$$\frac{d\,\frac{y+1+lv}{v}}{d\alpha(x} = \left(\frac{1}{v^2} - \frac{y+1+lv}{v^2}\right)\frac{dv}{d\alpha(x} = -\frac{y+lv}{v^2}\,\frac{dv}{d\alpha(x},$$

et que, par la même raison,

d

$$\frac{d\,\frac{y+1+lv}{v}}{dx\,(\alpha} = -\frac{y+lv}{v^2}\;\frac{dv}{dx\,(\alpha},$$

on verra que la seconde équation se réduit à

$$\frac{y+l\,[(x+\alpha)^2\,\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2}\left(1-\psi\alpha\,\frac{2\,\psi'\alpha+(x+\alpha)\,\psi''\alpha}{(x+\alpha)\,\psi'\alpha^2}\right)=0,$$

qui ne peut avoir lieu sans que α ne devienne une fonction de x, à moins que

$$y+l\,[(x+\alpha)^2\,\psi'\alpha]=0,$$

et que la première donne

$$p=-2\,\psi\alpha\,\frac{y+l\,[(x+\alpha)^2\,\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^3\,\psi'\alpha}-\frac{1}{(x+\alpha)^2}=-\frac{1}{(x+\alpha)^2},$$

$$q=\frac{\psi\alpha}{(x+\alpha)^2\,\psi'\alpha},$$

c'est-à-dire, les mêmes valeurs que nous avons déjà trouvées pour satisfaire à l'équation

$$(z-q)^2+p=0.$$

Mais comme

$$y+l\,[(x+\alpha)^2\,\psi'\alpha]=0,$$

donne

$$e^y=\frac{1}{(x+\alpha)^2\,\psi'\alpha};$$

la valeur de q en fonctions de x et de α, que nous avons prise pour Q, peut être changée en celle-ci :

$$Q'=e^y\,\psi\alpha:$$

alors

$$u=z-\int Q'\,dy=z-e^y\,\psi\alpha=\frac{1}{x+\alpha},$$

d'où

$$z = u + \int Q' dy = \frac{1}{x+\alpha} + e^y \psi \alpha,$$

qui, avec sa dérivée partielle relative à α seul,

$$e^y \psi' \alpha - \frac{1}{(x+\alpha)^2} = 0,$$

donne l'intégrale de la proposée sous une nouvelle forme, la plus simple de toutes, puisqu'on en tire immédiatement

$$p = -\frac{1}{(x+\alpha)^2},$$

$$q = e^y \psi \alpha,$$

et, par conséquent,

$$(z-q)^2 + p = 0.$$

---

§. II.

Application au second Ordre.

On doit d'abord distinguer deux classes d'équations aux différentielles partielles du second ordre : celles qui peuvent avoir une intégrale intermédiaire du premier ordre, et celles qui n'en sont pas susceptibles. Les premières peuvent, en général, s'intégrer par des méthodes analogues à celles qu'on emploie pour les équations du premier ordre ; cette considération a empêché la plupart des géomètres qui se sont occupés de l'intégration des équations aux différentielles partielles, de faire de la détermination de leur intégrale primitive l'objet d'une étude particulière. On s'est borné presque généralement à montrer comment on en peut trouver l'intégrale intermédiaire, et l'on a supposé qu'il ne restait plus alors, pour obtenir l'intégrale

primitive, qu'à l'intégrer de nouveau comme une équation ordinaire du premier ordre. Mais ce procédé, qui peut réussir dans beaucoup de cas, n'est ni le plus général, ni celui qui conduit le plus directement à l'intégrale primitive ; la présence d'une fonction arbitraire dans l'intégrale intermédiaire s'oppose souvent à ce que les méthodes pour l'intégration des équations du premier ordre puissent y être appliquées immédiatement, sur-tout quand elle est représentée par un système de deux équations ; et, lors même que cette circonstance n'a pas lieu, on est obligé de calculer de nouveau des équations qui se trouvent comprises parmi celles qu'on a dû tirer de l'équation donnée lorsqu'on a cherché son intégrale du premier ordre ; ce qui complique inutilement le calcul. J'ai donc cru faire une chose utile en donnant une méthode pour arriver directement à l'intégrale primitive, qui ne fût point exposée à cet inconvénient, et fît en même temps connaître les différentes formes dont cette intégrale est susceptible dans les divers cas qui peuvent se présenter. Lorsqu'il ne peut point y avoir d'intégrale intermédiaire, les méthodes d'intégration qui réussissent pour les équations qui en sont susceptibles ne peuvent plus être employées. Alors les équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, qui conduiraient à l'intégrale du premier ordre si elles satisfaisaient aux conditions d'intégrabilité, cessent de satisfaire à ces conditions, et jusqu'à présent on n'en a tiré aucun parti pour la recherche de l'intégrale primitive. Les méthodes d'intégration auxquelles on a eu jusqu'à présent recours dans ce cas, consistent en général à transformer, lorsque cela est possible, l'équation donnée, par le changement des variables indépendantes et de la fonction qui en dépend, en une autre équation dont l'intégrale soit connue, ou bien à supposer une forme à cette intégrale, et à tâcher de la particulariser de manière à satisfaire à l'équation donnée. C'est ainsi qu'on est parvenu à intégrer dans un grand nombre de cas les équations linéaires du second ordre : on n'a pas obtenu le même succès à l'égard des équations du même ordre qui ne sont pas linéaires. Je me suis proposé de

donner pour les unes et les autres une nouvelle méthode fondée sur la considération des équations déduites de la proposée qui semblent devoir être considérées comme aux différentielles ordinaires, mais qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, et dont on ne peut faire aucun usage tant qu'on les considère uniquement sous ce point de vue. Il n'en est pas de même lorsqu'on fait attention que ce sont de véritables équations aux différentielles partielles. La méthode que j'emploie pour en déduire les intégrales primitives d'un grand nombre d'équations privées d'intégrales intermédiaires, est loin encore d'être aussi générale qu'on pourrait le desirer; mais c'est du moins un premier pas dans un genre de recherches que je ne crois pas avoir été tenté, et qui me paraît promettre de conduire un jour à des résultats d'une toute autre importance que ceux que j'en ai déduits jusqu'à présent.

Pour mettre de l'ordre dans l'exposition de ces recherches, je m'occuperai successivement des équations aux différentielles partielles du second ordre dans les quatre cas suivans :

1.° Celui où l'intégrale primitive ne contient que des fonctions arbitraires de x ou de y.

2.° Celui où elle contient des fonctions arbitraires composées de quantités qui varient au contraire à-la-fois avec x et y, mais relativement auxquelles les dérivées de z contenues dans l'équation peuvent être hétérogènes à l'intégrale.

3.° Le cas où cette dernière circonstance a lieu à l'égard d'une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive, tandis que les mêmes dérivées sont nécessairement homogènes à l'intégrale relativement à l'autre fonction arbitraire.

4.° Le cas où ces dérivées sont nécessairement homogènes à l'intégrale relativement aux deux fonctions arbitraires. Je donnerai, dans chacun de ces cas, les formules qui doivent conduire à l'intégrale ; mais je n'appliquerai d'abord ces formules qu'aux équations du second ordre susceptibles d'une intégrale intermédiaire.

Je considérerai ensuite, en reprenant les quatre cas que je viens

d'indiquer, les équations du second ordre qui ne peuvent point avoir d'intégrales du premier ordre d'après la forme de l'équation donnée, et j'appliquerai les mêmes formules à chacun d'eux.

Lorsque l'intégrale primitive d'une équation du second ordre ne contient que des fonctions arbitraires de x ou de y, il peut arriver que les deux fonctions soient composées de la même variable indépendante, ou que l'une le soit de x et l'autre de y: dans le premier cas, les différenciations relatives à la variable qui n'entrent pas dans la composition des fonctions arbitraires n'introduisent dans le calcul aucune nouvelle quantité à éliminer; et les autres, en introduisant nécessairement un nombre au moins égal et souvent plus grand que celui des équations qu'elles fournissent, l'élimination des arbitraires ne peut donc avoir lieu qu'entre les premières; d'où il suit que l'équation du second ordre qui en résulte ne doit contenir que des dérivées de z relatives à une seule variable. Cette forme d'intégrale ne peut donc convenir qu'à des équations du second ordre qui se trouvent dans ce cas, et qui peuvent, par conséquent, être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, en remplaçant les constantes par des fonctions arbitraires de la variable qui est regardée comme constante dans ces intégrations.

Les équations du second ordre dont les intégrales renferment une fonction arbitraire de x et une de y, doivent être l'objet d'un examen plus approfondi. Suivant ce qui a été démontré dans un des paragraphes du mémoire inséré dans le XVIIe cahier du Journal de l'École royale polytechnique, elles ne peuvent alors contenir ni

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2 (y}\,,$$

ni

$$t = \frac{d^2 z}{dy^2 (x}\,:$$

on peut donc les représenter par la formule

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

ou, en supposant qu'on en ait tiré la valeur de s,

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

En y remplaçant s par sa valeur

$$\frac{dq}{dx(\alpha} - \frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} \frac{dy}{dx(\alpha},$$

pour former les équations P, Q, &c., on n'en trouve que deux, savoir :

$$\frac{dq}{dx(\alpha} = f(x, y, z, p, q),$$

et

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

dont la seconde donne $\alpha = y$; ce qui prouve que, dans toute équation où il n'y a de dérivées du second ordre que s, et dont l'équation primitive ne contient point d'intégrale partielle, une des fonctions arbitraires est nécessairement composée de y seul. On démontrerait de même, en changeant x en y et y en x, que l'autre fonction arbitraire l'est nécessairement de x seul; et cette connaissance une fois acquise, les équations qu'on trouverait en même temps, savoir,

$$\frac{dq}{dx(\alpha} = f(x, y, z, p, q),$$

$$\frac{dp}{dy(\beta} = f(x, y, z, p, q),$$

ne seraient que la proposée même dans laquelle s serait remplacé, tantôt par

$$\frac{dq}{dx(\alpha},$$

parce que $\alpha = y$, tantôt par

$$\frac{dp}{dy(\beta},$$

parce que $\beta = x$; ce qui n'apprendrait rien de nouveau. Il est aisé de voir d'ailleurs que la transformation dont nous parlons, ayant pour but de prendre pour variable indépendante une des quantités dont les fonctions arbitraires sont composées, doit devenir inutile lorsque cette condition est déjà remplie.

Si l'on remplace dans l'équation

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

s par $\frac{dq}{dx(y}$ et p par $\frac{dz}{dx(y}$, ou bien s par $\frac{dp}{dy(x}$ et q par $\frac{dz}{dy(x}$,

on aura

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y}\right) = 0,$$

ou

$$F\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy(x}, \frac{dp}{dy(x}\right) = 0,$$

dont la première peut être considérée comme aux différentielles ordinaires entre les trois variables x, z, q, en y regardant y comme constant, et la seconde comme une équation de la même nature entre les trois variables y, z, p, dans laquelle x est constant.

Si l'équation donnée a une intégrale intermédiaire et que cette intégrale résulte de l'élimination de la fonction de x entre l'intégrale primitive et sa dérivée relative à y, cette intégrale ne pourra renfermer que x, y, z, q, et deux fonctions arbitraires de y dérivées l'une de l'autre; il est évident qu'en différenciant alors par rapport à x, et éliminant des fonctions de y comme si c'étaient des constantes, on aura une équation entre

$$x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y},$$

identique à

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y}\right) = 0,$$

d'où il suit que cette dernière équation satisfera à la condition d'intégrabilité, c'est-à-dire qu'elle sera décomposable en facteurs de la forme

$$G\frac{dq}{dx\,(y}+H\frac{dz}{dx\,(y}+K=0,$$

G, H et K étant des fonctions de x, y, z, q entre lesquels on ait cette relation,

$$G\left[\left(\frac{dH}{dx}\right)-\left(\frac{dK}{dz}\right)\right]+H\left[\left(\frac{dK}{dq}\right)-\left(\frac{dG}{dx}\right)\right]+K\left[\left(\frac{dG}{dz}\right)-\left(\frac{dH}{dq}\right)\right]=0.$$

Lorsque ces deux conditions ne seront pas remplies, on sera sûr que l'équation donnée ne peut avoir une intégrale du premier ordre contenant seulement des fonctions arbitraires de y. On trouvera de même, en partant de

$$F\left(x,y,z,p,\frac{dz}{dy},\frac{dp}{dy}\right)=0,$$

les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'équation donnée ait une intégrale du premier ordre où entrent seulement des fonctions de x.

Au reste, quand je dis que ces intégrales intermédiaires contiennent l'une des fonctions de y, l'autre des fonctions de x, c'est parce que si on les tire de l'intégrale primitive où se trouvent, par exemple, $\varphi\,x$ et $\psi\,y$, la première contiendra $\psi\,y$ et $\psi'\,y$, et la seconde $\varphi\,x$ et $\varphi'\,x$; mais comme l'intégrale d'une équation aux différentielles ordinaires entre trois variables, qui satisfait à la condition d'intégrabilité, ne peut contenir qu'une seule constante arbitraire, il s'ensuit que, pour que l'équation donnée puisse être satisfaite par ces intégrales, il faut, dans le premier cas, que $\psi\,y$ et $\psi'\,y$ se réduisent à une seule fonction de y, et dans le second, que $\varphi\,x$ et $\varphi'\,x$ se réduisent à une seule fonction de x. C'est ainsi que

$$z=x^m\,\psi y+y^n\,\varphi x,$$

étant l'intégrale de

x

$$xys - nxp - myq + mnz = 0,$$

les deux intégrales intermédiaires sont

$$mz - xp = my^n\varphi x - xy^n\varphi' x \;,\; nz - yq = nx^m\psi y - x^m y\psi' y,$$

qui ne contiennent réellement chacune qu'une fonction arbitraire, puisqu'elles peuvent évidemment être écrites ainsi :

$$mz = xp + y^n \varpi x \quad , \quad nz = yq + x^m \chi y.$$

Lorsque l'équation est linéaire et représentée par

$$s + Pp + Qq + Nz + M = 0,$$

on trouve, en la comparant à

$$Gs + Hp + K = 0,$$

$$G = 1, \quad H = P, \quad K = Qq + Nz + M,$$

et l'équation

$$G\left[\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dK}{dz}\right)\right] + H\left[\left(\frac{dK}{dq}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right)\right] + K\left[\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dq}\right)\right] = 0,$$

devient

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) - N + PQ = 0;$$

ce qui s'accorde avec l'équation de condition qui doit être satisfaite pour qu'on obtienne, par la méthode de M. de Laplace, l'intégrale primitive dès la première transformation.

On trouverait de même

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) - N + PQ = 0,$$

pour la condition nécessaire à l'existence d'une intégrale intermédiaire où se trouve une fonction arbitraire de x.

Lorsqu'une des équations

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y)}\right) = 0,$$

ou

$$F\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy(x}, \frac{dp}{dy(x)}\right) = 0,$$

satisfera aux conditions d'intégrabilité, on trouvera immédiatement l'intégrale primitive de

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

dans le premier cas, en intégrant

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y)}\right) = 0,$$

relativement aux trois variables x, z, q, et remplaçant la constante arbitraire par une fonction de y; puis en y écrivant $\frac{dz}{dy(x}$ au lieu de q, et intégrant l'équation résultante par rapport aux deux variables y et z, ce qui n'exige aucune nouvelle condition, puisqu'il n'y a plus que deux quantités variables dans cette équation ; on remplacera ensuite par une fonction de x la constante arbitraire qui résulte de cette dernière intégration. Il faudra faire relativement à y ce que nous venons de faire par rapport à x, lorsque ce sera

$$F\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy(x}, \frac{dp}{dy(x)}\right) = 0$$

qui satisfera aux conditions d'intégrabilité.

Si l'on a, par exemple,

$$s + \frac{p+q}{x+y} = 0,$$

on pourra en tirer

$$(x+y)\frac{dp}{dy(x} + p + \frac{dz}{dy(x} = 0,$$

d'où

$$(x+y)p + z = \phi x,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dz}{dx(y} + \frac{1}{x+y}\, z = \frac{\varphi x}{x+y},$$

dont l'intégrale est

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x+y}} \left(\int e^{\int \frac{dx}{x+y}} \frac{\varphi x\, dx}{x+y} + \psi y \right),$$

ou en écrivant $\varphi\, x$ au lieu de $\int \varphi\, x\, d\, x$,

$$z = \frac{\varphi x + \psi y}{x+y}.$$

Les équations aux différentielles partielles du second ordre qui ne contiennent que la dérivée s de cet ordre, doivent être examinées avec d'autant plus de soin, que c'est souvent en y ramenantles autres équations aux différentielles partielles du second ordre qu'on parvient à les intégrer. L'intégration générale des équations comprises dans la formule

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

peut être regardée comme la première question à résoudre pour arriver à celle de toutes les équations du second ordre. Mais ce problème paraît devoir échapper encore long-temps aux méthodes de l'analyse actuelle ; on ne sait encore intégrer ces équations que dans le cas dont nous venons de parler, où elles ont une intégrale intermédiaire, et dans le cas des équations linéaires intégrées par M. de Laplace. Je reviendrai sur ces équations quand je m'occuperai des équations du second ordre qui n'ont pas d'intégrales intermédiaires ; je vais, en suivant l'ordre que je me suis prescrit, examiner les équations du second ordre qui en ont, et dont les intégrales primitives contiennent des fonctions arbitraires composées de quantités qui varient à-la-fois avec x et avec y.

Je ferai précéder cette recherche par quelques considérations générales sur les diverses méthodes d'intégration pour les équations aux différentielles partielles ; elles consistent toutes à remplacer l'équation

donnée par plusieurs équations dans lesquelles les quantités dont les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive sont composées, se trouvent mêlées avec les variables de l'équation donnée. Dans la méthode connue pour l'intégration des équations linéaires du second ordre, on prend deux nouvelles variables indépendantes qu'on détermine de manière que les deux dérivées extrêmes du second ordre disparaissent de l'équation transformée; ces deux nouvelles variables indépendantes sont précisément les quantités que j'ai nommées α et β, et l'équation donnée se trouve remplacée par trois équations entre x, y, z, α et β; savoir : deux entre x, y, et une des nouvelles variables, qui sont aux différentielles partielles du premier ordre, mais qu'on peut traiter comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, et la troisième qui doit donner la valeur de z et qui est aux différentielles partielles du second ordre, mais ne contenant de dérivées de cet ordre que celle qu'on obtient en faisant varier alternativement les deux variables indépendantes. Dans l'intégration des équations aux différentielles du premier ordre, on remplace l'équation donnée par deux équations entre x, y, z, α, soit immédiatement quand les dérivées du premier ordre sont hétérogènes à l'intégrale, soit dans le cas contraire, en partant de quatre équations entre x, y, z, p, q, α, d'où l'on élimine p et q. Ces équations, quoiqu'aux différentielles partielles, peuvent toujours s'intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce que x et α y étant pris pour les deux variables indépendantes, elles ne contiennent que des dérivées relatives à x.

Dans les équations du second ordre considérées en général, on doit se proposer de trouver trois équations entre x, y, z, α, β, par l'élimination, lorsqu'elle est possible, des dérivées de z; mais de quelque manière qu'on s'y prenne, deux, tout au plus de ces trois équations, peuvent être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires; la troisième contient nécessairement des dérivées relatives aux deux variables qn'on y considère comme indépendantes; mais cela n'empêche pas qu'elles ne conduisent à l'intégrale primitive dans beau-

coup d'autres cas que celui des équations linéaires, où l'emploi d'une transformation de ce genre a été suivi d'un plein succès.

J'expliquerai bientôt comment on doit déterminer les équations par lesquelles il convient de remplacer l'équation donnée, lorsqu'elle ne tombe pas dans ce dernier cas. Je remarquerai auparavant qu'on peut, dans le calcul de ces équations, prendre une des variables x ou y, et une des deux quantités α et β pour les deux variables indépendantes, par exemple, x et α, comme on le fait lorsqu'il s'agit d'intégrer les équations du premier ordre ; alors les trois équations doivent déterminer y, z et β en fonctions de x et de α : ou bien prendre pour variables indépendantes, de même que dans l'intégration des équations linéaires du second ordre par la méthode ordinaire, les deux quantités α et β. Chacun de ces procédés présente des avantages qui lui appartiennent exclusivement : c'est pourquoi je les examinerai successivement, et je donnerai les mêmes formules sous les deux formes différentes qu'elles prennent dans ces deux hypothèses de variabilité. La première de ces hypothèses, où l'on conserve pour variable indépendante une de celles qui l'étaient dans l'équation donnée, est la seule qu'on puisse admettre lorsque les deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive doivent, d'après la forme de l'équation donnée, être composées de la même quantité. On reconnaît ce cas en cherchant la valeur de β lorsque x et α sont pris pour variables indépendantes, parce qu'on trouve alors $\frac{d\beta}{dx(\alpha} = 0$ *.

C'est en général celle qui conduit à l'intégrale primitive par un calcul moins compliqué, et la donne sous une forme plus simple. C'est cependant la seconde hypothèse de variabilité où α et β sont pris

---

* Voyez ci-après la valeur générale de $\frac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$, dans les équations dont les dérivées du second ordre peuvent être hétérogènes à l'intégrale relativement aux deux fonctions arbitraires.

pour les deux variables indépendantes qui doit être préférée dans certains cas, dont je parlerai ci-après.

Pour qu'il puisse y avoir une intégrale intermédiaire, il faut en général que l'une des fonctions arbitraires de l'intégrale primitive y entre sans y être accompagnée d'autres fonctions qui en soient dérivées par voie de différenciation ou d'intégration, afin qu'elle puisse être éliminée par une seule différenciation : supposons que β désigne la quantité dont cette fonction arbitraire est composée, que l'intégrale soit composée de trois équations primitives entre x, y, z, α et β, et qu'en combinant de quelque manière que ce soit ces trois équations, on puisse éliminer $\phi\,\beta$ et en tirer la valeur de β, en mettant cette valeur dans deux de ces trois équations et sous le signe ϕ, on aura deux équations entre x, y, z, α, qui représenteront la même intégrale d'une manière plus simple, et il est évident qu'en prenant x et α pour les deux variables indépendantes, et cherchant β en même temps que y et z en fonctions de ces deux variables, on trouvera directement la valeur de β qui résulterait de cette élimination, et par conséquent l'intégrale elle-même sous la forme de deux équations au lieu de trois.

Quand je dis que cette valeur de β serait la même que celle qu'on tirerait par l'élimination de l'intégrale représentée par un système de trois équations primitives entre x, y, z, α, β, j'entends que ce pourrait être également celle de $\phi\,\beta$ tirée de la même intégrale ; car tant que $\varphi\,\beta$ n'y est accompagné d'aucune autre fonction qui en soit dérivée, il est toujours permis d'écrire β au lieu de $\psi\,\beta$, et $\chi\,\beta$ au lieu de β, χ désignant la fonction inverse de ψ.

Pour éclaircir ces considérations par un exemple, je prendrai l'équation

$$(r - p\,t)^2 = q^2\,r\,t.$$

Pour savoir si les dérivées de l'ordre le plus élevé contenues dans cette équation peuvent être hétérogènes à l'intégrale, il faut, d'après ce qui a été dit dans un des paragraphes précédens, former les équations

$P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., en substituant à ces dérivées leurs valeurs dans le cas où x et α sont pris pour variables indépendantes, et en égalant séparément à o les termes où $\dfrac{\frac{dq}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}}$ n'entre pas, et ceux qui multiplient chacune des puissances de cette quantité, et voir si toutes les équations se réduisent à deux d'où l'on puisse tirer plus d'une valeur de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, en faisant cette substitution et laissant pour abréger t à la place de $\dfrac{\frac{dq}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}}$; ce qui conduit aux mêmes résultats, puisque cette quantité n'entre point dans les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., on trouve, en passant tous les termes dans le premier membre, et ordonnant par rapport à t,

$$\left(\frac{dp}{dx\,(\alpha}-\frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2+2\left(\frac{dp}{dx\,(\alpha}-\frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)\left[\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2-p-\frac{q^2}{2}\right]t+$$
$$\left[\left(\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2-p\right)^2-q^2\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2\right]t^2=0,$$

d'où il est aisé de voir que les dérivées du second ordre peuvent, dans cet exemple, être hétérogènes à l'intégrale, puisque l'on satisfait à la condition que cette équation ait lieu, quelle que soit la valeur de t, au moyen de deux équations seulement, savoir :

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha}-\frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}=0,$$
$$\left[\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2-p\right]^2-q^2\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2=0,$$

dont la dernière donne quatre valeurs pour $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, d'abord les deux racines de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2-q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}-p=0, \quad [A],$$

et ensuite les deux racines de

$$\left(\frac{dy}{dx\,(\,\alpha}\right)^2 + q\,\frac{dy}{dx\,(\,\alpha} - p = 0, \quad [B];$$

il est aisé de voir qu'en combinant l'équation [B] avec

$$\frac{dp}{dx\,(\,\alpha} - \frac{dq}{dx\,(\,\alpha}\,\frac{dy}{dx^2(\,\alpha} = 0,$$

on obtient une équation intégrable ; car, en vertu de cette dernière, sa différentielle se réduit à

$$\left[2\,\frac{dy}{dx\,(\,\alpha} + q\right]\frac{d^2y}{dx\,(\,\alpha} = 0, \quad [C],$$

dont le second facteur donne

$$\frac{dy}{dx\,(\,\alpha} = \alpha;$$

en intégrant cette valeur de $\frac{dy}{dx^2\,(\,\alpha}$, on a

$$y = \alpha x + \vartheta\,\alpha,$$

et en la substituant dans l'équation [B],

$$\alpha^2 + q\alpha - p = 0:$$

en sorte que pour avoir l'intégrale du premier ordre, il faudra éliminer α entre ces deux équations ; ce qui donnera

$$2y + qx \pm x\sqrt{q^2 + 4p} = \vartheta(q \pm \sqrt{q^2 + 4p}).$$

On se tromperait beaucoup si l'on pensait qu'en prenant alternativement les signes supérieurs et les signes inférieurs dans cette équation, on aurait deux intégrales intermédiaires de la proposée. Pour reconnaître l'origine de ce double signe, et par conséquent de la duplication des valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\,\alpha}$ dans l'équation [B], il faut faire attention que la proposée

$$(r - pt)^2 = q^2 rt,$$

en

en même temps qu'elle est du second ordre, est du second degré relativement aux dérivées de cet ordre, c'est-à-dire que ces dérivées y sont élevées au second degré tant que l'équation est sous forme rationnelle; en la résolvant par rapport à ces mêmes dérivées, on trouve que l'équation

$$(r-pt)^2-q^2rt=0,$$

peut être considérée comme le produit des deux suivantes :

$$2r-t(q^2+2p+q\sqrt{q^2+4p})=0,$$

$$2r-t(q^2+2p-q\sqrt{q^2+4p})=0,$$

qui ont lieu séparément sur les deux nappes de la surface qu'exprime cette équation, de même que les différentes valeurs de y dans une équation algébrique se rapportent aux différentes branches de la courbe qu'elle représente. Or il est aisé de vérifier que

$$2y+qx+x\sqrt{q^2+4p}=\varphi(q+\sqrt{q^2+4p})$$

donne

$$2r-t(q^2+2p+q\sqrt{q^2+4p})=0,$$

et que

$$2y+qx-x\sqrt{q^2+4p}=\varphi(q-\sqrt{q^2+4p}),$$

donne

$$2r-t(q^2+2p-q\sqrt{q^2+4p})=0.$$

Ce ne sont point là deux intégrales du premier ordre d'une même équation du second, mais les deux parties d'une seule intégrale du premier ordre, qu'il faut réunir pour exprimer toutes les nappes de la surface représentée par l'équation donnée.

On voit maintenant pourquoi l'équation en $\frac{dy}{dx(\alpha}$ montait au quatrième degré. Elle devait donner les valeurs correspondantes à ces

deux portions d'intégrale première, quand on prend pour variables indépendantes x et la quantité dont se compose la fonction arbitraire qui reste dans cette intégrale première, et les deux valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, quand on prend pour variables indépendantes x et la quantité dont se compose l'autre fonction arbitraire de l'intégrale primitive.

Puisque nous avons tiré $\frac{dy}{dx(\alpha}$ de l'équation [B]. pour arriver à

$$y = \alpha x + \gamma \alpha,$$

et

$$\alpha^2 + \alpha q - p = 0,$$

il est clair qu'en nommant β la quantité dont l'autre fonction arbitraire est composée, $\frac{dy}{dx(\alpha}$ doit être tiré de l'équation [A], qu'on doit, par conséquent, écrire ainsi :

$$\left(\frac{dy}{dx(\beta}\right)^2 - q\frac{dy}{dx(\beta} - p = 0.$$

En général, lorsqu'une équation de l'ordre m est du degré n relativement aux dérivées de cet ordre, c'est-à-dire, lorsque ces dérivées montent au degré n dans cette équation délivrée de fractions et de radicaux, on doit tirer des équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ par une équation du degré $m\,n$, lorsque les dérivées de l'ordre le plus élevé sont toutes hétérogènes à l'intégrale. Mais cette proposition est sujette à trop d'exceptions pour la discuter ici. Je parlerai bientôt de celle qui a lieu quand il n'y a de termes du second degré dans une équation du second ordre, que $rt - s^2$.

Nous avons été conduits à l'intégrale intermédiaire

$$2y + qx \pm x\sqrt{q^2 + 4p} = \gamma(q \pm \sqrt{q^2 + 4p}),$$

en égalant à 0 le premier facteur de l'équation [C]; à l'égard du second,

$$2\frac{dy}{dx(\alpha}+q=0,$$

lorsqu'on le combine avec l'équation [B], on obtient

$$p+\frac{q^2}{4}=0,$$

qui est une solution particulière de l'équation donnée, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Si l'on appliquait à l'intégrale intermédiaire

$$2y+qx\pm x\sqrt{q^2+4p}=\gamma(q\pm\sqrt{q^2+4p}),$$

les méthodes connues pour l'intégration des équations du premier ordre, on considérerait comme variables indépendantes x et la quantité dont se compose la fonction arbitraire de l'intégrale primitive qui ne se trouve pas dans cette intégrale intermédiaire, quantité qui est évidemment celle que nous avons nommée β, ou une de ses fonctions, ce qui revient au même : cette opération ne pourrait donc que conduire de nouveau aux équations que nous avons déjà obtenues en opérant sur l'équation donnée, et en considérant x et β comme les deux variables indépendantes; savoir :

$$\left(\frac{dy}{dx(\beta}\right)^2-q\frac{dy}{dx(\beta}-p=0,$$

$$\frac{dp}{dx(\beta}-\frac{dq}{dx(\beta}\frac{dy}{dx(\beta}=0,$$

qu'il suffit de combiner avec

$$y=\alpha x+\gamma\alpha,$$

$$\alpha^2+\alpha q-p=0,$$

$$dz=pdx+qdy,$$

pour avoir toutes les données nécessaires à l'intégration de la proposée. On a ainsi cinq équations qui déterminent y, z, p, q, β, en fonctions

de x et de α, en sorte qu'en éliminant p et q on aura trois équations, d'où il faudra tirer y, z et β en fonctions de x et de α.

Nous avons déjà $y = \alpha x + \gamma \alpha$ déterminé de cette manière : reste donc à trouver β et z.

β pouvant être remplacé par $\psi\,\beta$, cette quantité doit être déterminée en x et α par une équation aux différentielles partielles du premier ordre, qui donne la valeur du rapport $\frac{\frac{d\beta}{dx\,(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha\,(x}}$; valeur qui reste la même quand on met $\psi\,\beta$ au lieu de β, ainsi qu'on l'a vu dans un des paragraphes du mémoire inséré dans le XVII.ᵉ cahier du Journal de l'École royale polytechnique ; mais ce rapport est égal à $-\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}$, et en le considérant sous ce dernier point de vue, cette équation aux différentielles partielles du premier ordre peut être intégrée comme une équation aux différentielles ordinaires dans l'intégrale de laquelle on remplace la constante arbitraire par β. Cherchons donc la valeur de $\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}$ en fonction de x et de α.

A l'égard de z, il faut tâcher d'avoir $\frac{dz}{dx\,(\beta}$, parce que la valeur de z doit contenir une fonction arbitraire de β, qui s'introduira naturellement dans le calcul en remplaçant la constante arbitraire de la fonction primitive de $\frac{dz}{dx\,(\beta}$ par cette fonction.

La valeur de p tirée de l'équation

$$\alpha^2 + \alpha q - p = 0,$$

étant substituée dans

$$\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}\right)^2 - q\,\frac{dy}{dx\,(\beta} - p = 0,$$

et dans

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} = p + q\,\frac{dy}{dx\,(\beta},$$

donne

$$\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}+\alpha\right)\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}-\alpha-q\right)=0,$$

et

$$\frac{dz}{dx\,(\beta}=\alpha^2+q\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}+\alpha\right);$$

le premier facteur de la première de ces deux équations réduit la seconde à $\frac{dz}{dx\,(\beta}=\alpha^2$, en sorte que p et q se trouvent éliminés, et qu'on a pour déterminer β et z deux équations bien simples, savoir :

$$\frac{dy}{dx\,(\beta}=-\alpha,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\beta}=\alpha^2,$$

qu'il faut combiner avec

$$y=\alpha x+\gamma\alpha.$$

Il est à remarquer qu'on trouve la même valeur pour $\frac{dy}{dx\,(\beta}$ en opérant sur l'intégrale première comme sur une équation du premier ordre qu'on se proposerait d'intégrer. On voit en effet, en comparant cette intégrale première, qui est représentée par

$$2y+qx\pm x\sqrt{q^2+4p}=\gamma(q\pm\sqrt{q^2+4p}),$$

avec

$$y-\alpha x=\gamma\alpha,$$

que

$$\alpha=-\frac{q\pm\sqrt{q^2+4p}}{2},$$

et en la différenciant par rapport à y, substituant à la place de s sa valeur $\frac{dq}{dx\,(\beta}-t\frac{dy}{dx\,(\beta}$ et égalant à o le coefficient de t, on trouve

$$\frac{dy}{dx(\beta} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2}, \text{ ou } \frac{dy}{dx(\beta} = -\alpha;$$

mais il est évident que pour obtenir par ce procédé la valeur de $\frac{dy}{dx(\beta}$ sous cette dernière forme, il faut savoir d'avance que

$$y - \alpha x = ȣ\alpha$$

doit être une des équations de l'intégrale.

Cette observation conduit à voir d'où vient le second facteur de l'équation qui nous a donné $\frac{dy}{dx(\beta} = -\alpha$. Ce second facteur donne en effet

$$\frac{dy}{dx(\beta} = q + \alpha = \frac{q \mp \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

qui ne diffère de l'autre valeur

$$\frac{dy}{dx(\beta} = -\alpha = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

que parce que le radical y est pris avec un signe contraire; en sorte que, quand $y = \alpha x + ȣ\alpha$ représente une des deux portions de l'intégrale du premier ordre, on a $\frac{dy}{dx(\beta} = -\alpha$ pour la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx(\beta}$, tandis que l'autre valeur $\frac{dy}{dx(\beta} = q + \alpha$ correspond à l'autre portion de la même intégrale. C'est donc la première seule qu'il faut combiner avec $y = \alpha x + ȣ\alpha$, pour obtenir l'intégrale primitive. On en rend le calcul plus simple en écrivant α^2 au lieu de α, et $\alpha^2 \phi'\alpha$ à la place de $ȣ\alpha$: on a alors

$$y = \alpha^2(x + \phi'\alpha),$$

$$\frac{dy}{dx(\beta} = -\alpha^2,$$

$$\frac{dz}{dx(\beta} = \alpha^4.$$

La première donne

$$\frac{dy}{dx(\beta} = \alpha^2 + (2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(\beta},$$

et, en combinant cette équation avec la seconde, on a

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -\frac{2\alpha^2}{2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha},$$

dont l'intégrale est ce que devient celle de l'équation

$$2x\,d\alpha + 2\alpha\,dx + 2\phi'\alpha\,d\alpha + \alpha\phi''\alpha\,d\alpha = 0,$$

lorsqu'on y remplace la constante arbitraire par β; on a donc

$$\beta = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha.$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer aussi z en fonction de x et de α: pour cela on divisera la valeur de $\frac{dz}{dx(\beta}$ par celle de $\frac{d\alpha}{dx(\beta}$, après avoir écrit cette dernière ainsi :

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -\frac{2\alpha^2}{\beta - \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha},$$

et on aura

$$\frac{dz}{d\alpha(\beta} = -\frac{\alpha^2}{2}(\beta - \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha);$$

d'où

$$z = -\frac{\alpha^3\beta}{6} + \frac{1}{2}\int(\alpha^2\phi\alpha - \alpha^3\phi'\alpha - \alpha^4\phi''\alpha)\,d\alpha + \psi\beta.$$

Or

$$\int\alpha^4\phi''\alpha\,d\alpha = \alpha^4\phi'\alpha - 4\int\alpha^3\phi'\alpha\,d\alpha = \alpha^4\phi'\alpha - 4\alpha^3\phi\alpha + 12\int\alpha^2\phi\alpha\,d\alpha,$$

et

$$\int\alpha^3\phi'\alpha\,d\alpha = \alpha^3\phi\alpha - 3\int\alpha^2\phi\alpha\,d\alpha:$$

ainsi

$$z = -\frac{\alpha^3\beta}{6} + \frac{3}{2}\alpha^3\phi\alpha - \frac{1}{2}\alpha^4\phi'\alpha - 4\int\alpha^2\phi\alpha\,d\alpha + \psi\beta,$$

ou en substituant à β sa valeur,

$$z=\frac{4\alpha^3\varphi\alpha-2\alpha^4\varphi'\alpha-\alpha^4 x}{3}-4\int\alpha^3\varphi\alpha d\alpha+\psi(2\alpha x+\varphi\alpha+\alpha\varphi'\alpha),$$

en sorte que l'intégrale primitive de $(r-pt)^2=q^2rt$ est représentée par le système des deux équations

$$z+\frac{\alpha^4 x-4\alpha^3\varphi\alpha+2\alpha^4\varphi'\alpha}{3}+4\int\alpha^3\varphi\alpha d\alpha=\psi(2\alpha x+\varphi\alpha+\alpha\varphi'\alpha),$$
$$y=\alpha^2 x+\alpha^2\varphi'\alpha.$$

Je ferai sur cette intégrale quelques observations qui s'appliquent en général aux équations aux différentielles partielles du second ordre qui s'intègrent de la même manière.

La première est relative à l'équation

$$\frac{dz}{dx\,(\beta}=\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}\right)^2,$$

qu'on obtient en éliminant α entre les deux équations qui donnent les valeurs de $\frac{dz}{dx\,(\beta}$ et de $\frac{dy}{dx\,(\beta}$. Cette équation, en y considérant β comme une constante, est aux différentielles entre les trois variables x, y, z, sans aucune des dérivées p, q, r, &c. de z; mais elle ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. M. Monge a donné une méthode pour transformer une équation de ce genre en une équation aux différentielles partielles du premier ordre. On pourrait croire que quand cette circonstance se présente dans l'intégration d'une équation du second ordre, celle du premier qui résulte de cette transformation peut être de quelque utilité pour trouver l'intégrale de l'équation donnée ; mais je me suis assuré par des considérations qu'il serait trop long de développer ici, qu'elle ne peut conduire qu'à une solution particulière : je me bornerai à le vérifier sur l'équation que j'ai prise ici pour exemple.

En faisant $\frac{dz}{dx\,(\beta}=p+q\frac{dy}{dx\,(\beta}$, et $\frac{dy}{dx\,(\beta}=u$, on a

$$p + q u = u^2,$$

et il faut, suivant le procédé donné par M. Monge, éliminer u entre cette équation et sa dérivée prise en ne faisant varier que u; savoir :

$$q = 2 u :$$

or cette opération donne

$$p + \frac{q^2}{4} = 0,$$

qui est précisément la solution particulière de $(r - p t)^2 = q^2 r t$, que nous avons déjà trouvée.

La seconde observation est relative à la forme des quantités composées de x et de α, qui entrent dans cette intégrale. Deux de ces quantités se trouvent dans la première équation, l'une hors du signe ψ, et l'autre sous ce signe ; la troisième forme le second membre de la seconde équation. Si l'on prend les dérivées relatives à α seul de ces trois quantités, on trouvera qu'elles ont toutes trois un facteur commun où se trouve exclusivement la nouvelle dérivée de $\varphi\,\alpha$ que ces différenciations introduisent dans le calcul. Ces trois dérivées se réduisent, en effet, à

$$\frac{2}{3}\alpha^3(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha),$$

$$(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\,\psi'(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha),$$

$$\alpha(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha),$$

où la nouvelle fonction dérivée de $\varphi\,\alpha$, savoir, $\varphi''\alpha$, n'entre que dans le facteur commun

$$2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha.$$

Il suit de là que si l'on tire de la première de ces équations la valeur de $\frac{dz}{d\alpha(x}$, et celle de $\frac{dy}{d\alpha(x}$ de la seconde, cette fonction dispa-

raîtra de la fraction $\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ qui est la valeur de q, en sorte que cette dérivée, et par conséquent aussi l'autre dérivée p *, seront homogènes à l'intégrale relativement aux fonctions de α. Il est aisé de voir que la même chose aura nécessairement lieu quand l'intégrale étant composée de deux équations, où une des fonctions arbitraires entre sans aucune fonction qui en dérive par voie de différenciation ou d'intégration, les valeurs des dérivées du premier ordre devront, d'après la forme de l'équation donnée, être nécessairement homogènes à l'intégrale.

Pour le démontrer d'une manière générale, je remarquerai d'abord que si l'on représente l'intégrale par les deux équations

$$U = 0,$$

$$V = 0,$$

et que l'on y considère x et α comme les deux variables indépendantes, on en tirera, en les différenciant par rapport à α,

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = -\frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)}$$

---

* *Voyez* le Mémoire sur les intégrales des équations aux différentielles partielles inséré dans le 17.ᵉ cahier du journal de l'École royale polytechnique, pag. 574, où j'ai démontré que cette propriété ne peut appartenir à une dérivée de z sans se présenter aussi dans toutes ses autres dérivées du même ordre. Il est d'ailleurs évident qu'on a ici

$$p = -\frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^3}{3}(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} + \left[2\alpha + (2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y}\right]\psi'(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha) =$$

$$\frac{\alpha^4}{3} + \alpha\psi'(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha),$$

parce que la seconde équation de l'intégrale primitive donne

$$(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} = -\alpha.$$

$$\frac{dy}{d\alpha(x} = -\frac{\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)},$$

qui ne doivent contenir, d'après ce qui a été démontré dans un des paragraphes précédens, la nouvelle fonction dérivée de α, produite par ces différenciations, que dans un facteur commun à ces deux valeurs $\frac{dz}{dx(\alpha}$ et $\frac{dy}{dx(\alpha}$, pour que p et q soient homogènes à l'intégrale. Or cette nouvelle dérivée ne peut évidemment se trouver dans $\left(\frac{dU}{dz}\right)$, $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, $\left(\frac{dU}{dy}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$, mais seulement dans $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)$, qui n'entrent qu'au numérateur dans les valeurs de $\frac{dz}{dx(\alpha}$, $\frac{dy}{dx(\alpha}$; il faudra donc que les deux quantités

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right),$$

et

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left(\frac{dV}{dz}\right) - \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right),$$

soient divisibles par ce facteur; d'où il est aisé de conclure que

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$$

et

$$\left(\frac{dV}{d\alpha}\right),$$

doivent l'être séparément. Telle est la condition nécessaire pour que les valeurs de p et de q puissent être homogènes à l'intégrale. Il est nécessaire, de plus, que l'une des deux quantités U et V contienne une fonction arbitraire. Supposons que ce soit U, et représentons cette fonction par $\psi\,\beta$, β étant donné en fonction de $x, y, z, \alpha, \phi\,\alpha$ et des fonctions de α dérivées de $\phi\,\alpha$, soit par voie de différenciation, soit par voie d'intégration, nous aurons

$$U = F(x, y, z, \alpha, \phi\alpha, \phi'\alpha \text{ \&c.} \int A\,\phi\alpha\,d\alpha \text{ \&c. } \psi\beta);$$

d'où il suit qu'en désignant par $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right]$ ce que deviendrait $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$ si l'on en effaçait les termes qui proviennent des termes en α contenus dans β, la valeur de $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$ sera $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right] + \left(\frac{dU}{d\psi}\right)\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\psi'\beta$, où la nouvelle fonction dérivée de $\phi\alpha$ produite par cette différenciation, ne peut se trouver que dans $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right]$ et $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$, puisqu'elle ne peut s'introduire dans $\left(\frac{dU}{d\psi}\right)$, qui résulte d'une différenciation étrangère à α; mais $\psi'\beta$ doit rester absolument arbitraire : d'où il suit que cette nouvelle fonction ne peut être contenue exclusivement dans un facteur commun à tous les termes de $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)$, sans que ce facteur ne divise séparément $\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]$ et $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$. Si l'autre équation $V = 0$ contenait aussi $\psi\beta$, la même démonstration prouverait que $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)$ ne peut pas être divisible par ce facteur, si $\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]$ ne l'est pas aussi en même temps que $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$.

Il faut donc, pour que p et q puissent être homogènes à l'intégrale, qu'ils divisent exactement trois quantités, savoir :

$$\left[\frac{dU}{d\alpha}\right],\ \left[\frac{dV}{d\alpha}\right],\ \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

quand $\psi\beta$ entre dans les deux équations, et

$$\left[\frac{dU}{d\alpha}\right],\ \left(\frac{dV}{d\alpha}\right),\ \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

quand $\psi\beta$ n'entre que dans l'équation $U = 0$, ce qui donne

$$\left(\frac{dV}{d\alpha}\right) = \left[\frac{dV}{d\alpha}\right],$$

comme il arrive dans l'exemple que nous venons d'examiner.

Je remarquerai, en troisième lieu, que lorsqu'il arrive, comme dans l'exemple précédent, qu'une des équations de l'intégrale donne la valeur de y en fonctions de x et de α, et qu'on a d'ailleurs celle de β exprimée de la même manière, on peut :

1.° Changer la valeur de β en une fonction de x, y et α, dont la dérivée relative à α seul soit nulle en vertu de cette équation ; il suffit pour cela de prendre la valeur de $\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, qui se réduira à une fonction de x et de α homogène à l'intégrale par la suppression du facteur commun à son numérateur et à son dénominateur. En représentant cette valeur par M, et celle de y par N, M et N ne contenant que x, α et les fonctions de α qui se trouvent dans l'intégrale, on n'aura qu'à remplacer β par $\beta + My - MN$; car la dérivée par rapport à α de cette quantité, sera $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) - M\left(\frac{dN}{d\alpha}\right) + (y-N)\left(\frac{dM}{d\alpha}\right)$, qui est égal à o, puisque $M = \frac{\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dN}{d\alpha}\right)}$, et que $y = N$.

Dans l'exemple précédent,

$$\beta = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha \quad , \quad y = \alpha^2 x + \alpha^2\phi'\alpha :$$

ainsi

$$M = \frac{2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha}{2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha} = \frac{1}{\alpha},$$

$$N = \alpha^2 x + \alpha^2\phi'\alpha.$$

Il faudra donc remplacer la valeur

$$2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha$$

de β par

$$2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha + \frac{y}{\alpha} - \alpha x - \alpha\varphi'\alpha = \frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi\alpha;$$

2.° Opérer sur l'autre équation de l'intégrale, après y avoir remplacé la valeur de β par celle qu'on aura ainsi obtenue, précisément comme nous l'avons fait à la fin du paragraphe précédent sur les intégrales des équations du premier ordre, pour les changer en deux équations dont l'une soit la dérivée de l'autre par rapport à α. La quantité $\psi\,\beta$ qui se trouve dans cette équation, n'empêchera pas le succès de cette transformation, puisqu'au moyen du changement que nous venons de faire dans β, $\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} = 0$; on aura ainsi l'intégrale sous la forme d'un système de deux équations dont la seconde sera la dérivée de la première relativement à α seul, et réduira en même temps à o la dérivée prise par rapport à α seul de la fonction arbitraire qui n'est pas composée de α.

Par exemple, la valeur que nous venons de trouver pour β change l'intégrale de l'équation $(r - pt)^2 = q^2 rt$, en

$$z = \frac{4\alpha^3\varphi\alpha - 2\alpha^4\varphi'\alpha - \alpha^4 x}{3} - 4\int\alpha^2\varphi\alpha d\alpha + \psi\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi\alpha\right),$$

on en tire, à cause que

$$-\frac{y}{\alpha^2} + x + \varphi'\alpha = 0,$$

en vertu de la valeur de y,

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = -\frac{4\alpha^3\varphi'\alpha + 2\alpha^4\varphi''\alpha + 4\alpha^3 x}{3},$$

et comme cette valeur de y donne

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x} = 2\alpha\varphi'\alpha + \alpha^2\varphi''\alpha + 2\alpha x,$$

on a

$$Q = \frac{\frac{dz}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}} = -\frac{2\alpha^2}{3},$$

d'où

$$u = z - Q(\alpha^2 x + \alpha^2 \varphi'\alpha) = \frac{4\alpha^3 \varphi\alpha + \alpha^4 x}{3} -$$
$$4\int \alpha^2 \varphi\alpha . d\alpha + \psi\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi\alpha\right),$$

ce qui donne pour $z = u + Qy$, cette valeur

$$z = \frac{\alpha^4 x - 2\alpha^2 y + 4\alpha^3 \varphi\alpha}{3} - 4\int \alpha^2 \varphi\alpha d\alpha + \psi\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi\alpha\right),$$

qui réunie à

$$y = \alpha^2 x + \alpha^2 \varphi'\alpha,$$

représente l'intégrale de

$$(r - pt)^2 = q^2 rt$$

sous la forme la plus simple.

Cette intégrale se vérifie par un calcul bien simple, parce que la seconde équation fait disparaître $\frac{d\alpha}{dx\,(y}$ et $\frac{d\alpha}{dy\,(x}$ de ses dérivées du premier ordre relatives à x et à y, en sorte qu'on a sur-le-champ

$$p = \frac{\alpha^4}{3} + \alpha\psi'\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi\alpha\right),$$
$$q = -\frac{2\alpha^2}{3} + \frac{1}{\alpha}\psi'\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi\alpha\right),$$

et en éliminant la fonction désignée par le signe ψ',

$$p - \alpha^2 q = \alpha^4,$$

on en tire

$$r - \alpha^2 s = (4\alpha^3 + 2\alpha q)\frac{d\alpha}{dx\,(y},$$
$$s - \alpha^2 t = (4\alpha^3 + 2\alpha q)\frac{d\alpha}{dy\,(x},$$

d'où

$$\frac{r - \alpha^2 s}{s - \alpha^2 t} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}(y}{\frac{d\alpha}{dy}(\alpha} = -\alpha^2,$$

parce que la seconde équation de l'intégrale

$$y = \alpha^2 x + \alpha^2 \varphi' \alpha$$

donne

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}(y}{\frac{d\alpha}{dy}(x} = -\alpha^2,$$

on a donc

$$r = \alpha^4 t,$$

d'où l'on tire

$$p - q\sqrt{\frac{r}{t}} = \frac{r}{t},$$

et par conséquent

$$(r - pt)^2 - q^2 rt = 0.$$

Parmi les équations du second ordre dans lesquelles les dérivées de cet ordre peuvent être hétérogènes à l'intégrale, se trouvent d'abord comprises toutes celles dans lesquelles ces dérivées ne sont élevées qu'à la première puissance, parce qu'alors il est évident que t n'entrant aussi qu'à la première puissance dans la transformée, on n'en déduit que deux équations en égalant séparément à o les termes indépendans de t et ceux qui sont multipliés par t. Il en est de même des équations qui contiennent en outre un terme où $rt - s^2$ est multiplié par une fonction de x, y, z, p, q, parce qu'en substituant à la place de r et de s leurs valeurs

$$\frac{dp}{dx}(\alpha - \frac{dq}{dx}(\alpha\, \frac{dy}{dx}(\alpha + t\left(\frac{dy}{dx}(\alpha\right)^2$$

et

et

$$\frac{dq}{dx(\alpha} = s + t\,\frac{dy}{dx(\alpha};$$

on trouve

$$rt - s^2 = -\left(\frac{dq}{dx(\alpha}\right)^2 + t\left(\frac{dp}{dx(\alpha} + \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{dx(\alpha}\right),$$

qui ne contient aussi t qu'à la première puissance. Pour traiter ces équations d'une manière générale, je les représenterai par la formule

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, et j'en tirerai les deux équations que j'ai représentées par $P = 0$ et $Q = 0$, savoir :

$$H\left(\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{dx(\alpha}\right) + 2K\frac{dq}{dx(\alpha} + M - N\left(\frac{dq}{dx(\alpha}\right)^2 = 0;$$

et

$$H\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - 2K\frac{dy}{dx(\alpha} + L + N\left(\frac{dp}{dx(\alpha} + \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{dx(\alpha}\right) = 0;$$

dont la seconde peut s'écrire ainsi :

$$(H + Nt)\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{dy}{dx(\alpha} + L + Nr = 0;$$

et donne, lorsqu'on la résout par rapport à $\frac{dy}{dx(\alpha}$,

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL - N[Hr + 2Ks + Lt + N(rt - s^2)]}}{H + Nt}$$

ou

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt},$$

d'où l'on tire, à cause que

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha} = s + t\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

cette équation

$$H\frac{dy}{dx\,(\alpha} + N\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} = K \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}.$$

La première équation, qui peut s'écrire ainsi,

$$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \left(2K - H\frac{dy}{dx\,(\alpha} - N\,\frac{dq}{dx\,(\alpha}\right)\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0,$$

se réduit, par conséquent, à

$$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K \mp \sqrt{K^2 - HL + MN})\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0.$$

Telles sont les deux équations entre x, y, z, p, q, qui ne contiennent que des dérivées relatives à x, et dont on doit tirer, quand cela est possible, l'intégration de l'équation donnée.

Il est aisé de vérifier qu'en remettant, dans ces deux équations, à la place de $\frac{dp}{dx\,(\alpha}$ et de $\frac{dq}{dx\,(\alpha}$ leurs valeurs $r + s\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, $s + t\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, et en éliminant $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, on retrouve l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

Dans ces deux équations, le double signe vient de ce qu'on y peut prendre alternativement pour α les deux quantités dont se composent les fonctions arbitraires de l'intégrale; en sorte que, si l'on représente ces deux quantités par α et β, et qu'on fasse pour abréger $K^2 - HL + MN = G$, on en aura quatre, savoir :

$$N\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} + H\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

$$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K - \sqrt{G})\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0,$$

$$N\frac{dq}{dx\,(\beta}+H\frac{dy}{dx\,(\beta}-K+\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx\,(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\beta}+M=0.$$

Dans deux de ces équations, les variables indépendantes sont x et α, et dans les deux autres, x et β; on peut en tirer quatre équations où ces variables soient les mêmes dans toutes, soit en conservant x avec une des deux quantités α et β, soit en prenant ces dernières quantités pour les deux variables indépendantes. La première forme est celle sous laquelle on doit employer ces équations, lorsque β peut être exprimé dans l'intégrale primitive par une fonction déterminée de x, de α, et des fonctions de α, comme il arrive dans l'intégrale de $(r-pt)^2=q^2rt$, et dans une classe entière d'équations du second ordre, où sont comprises, ainsi qu'il a été dit plus haut, toutes celles qui sont susceptibles d'une intégrale intermédiaire. Quand cette circonstance n'a pas lieu, il faut prendre α et β pour les deux variables indépendantes dans l'un et l'autre cas; en réunissant ces quatre équations à

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

on en aura cinq entre les sept quantités $x, y, z, p, q, \alpha, \beta$, d'où il s'agira d'éliminer p et q, et d'arriver, dans le premier cas, aux valeurs de y, z, β, en fonctions de x et de α, et dans le second aux valeurs de x, y, z en fonctions de α et de β. Considérons d'abord ce qui arrive lorsqu'on prend x et α pour variables indépendantes. Alors parmi les cinq équations, il y en a trois, savoir :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dz}{dx\,(\alpha}=p+q\frac{dy}{dx\,(\alpha},\\&N\frac{dq}{dx\,(\alpha}+H\frac{dy}{dx\,(\alpha}-K-\sqrt{G}=0,\\&H\frac{dp}{dx\,(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\alpha}+M=0,\end{aligned}\right\}[A]$$

qui se trouvent rapportées aux variables indépendantes x et α, et qui ne contiennent que des dérivées relatives à la seule variable x : à l'égard des deux autres, on les ramène aisément aux mêmes variables indépendantes, mais elles renferment alors des dérivées relatives à l'une et l'autre. Pour cela on observe que u étant une variable quelconque,

$$\frac{du}{dx(\beta} = \frac{du}{dx(\alpha} + \frac{du}{d\alpha(x} \frac{d\alpha}{dx(\beta},$$

et en faisant successivement u égal à y, p, q, on en conclut

$$N\frac{dq}{dx(\alpha} + H\frac{dy}{dx(\alpha} + \left(N\frac{dq}{d\alpha(x} + H\frac{dy}{d\alpha(x}\right)\frac{d\alpha}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\alpha} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha} + \left(H\frac{dp}{d\alpha(x} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}\right)\frac{d\alpha}{dx(\beta} + M = 0;$$

qui se réduisent, en vertu des précédentes, à

$$\left(N\frac{dq}{d\alpha(x} + H\frac{dy}{d\alpha(x}\right)\frac{d\alpha}{dx(\beta} + 2\sqrt{G} = 0,$$

et

$$\left(H\frac{dp}{d\alpha(x} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}\right)\frac{d\alpha}{dx(\alpha} + 2\sqrt{G}.\frac{dq}{dx(\alpha} = 0.$$

Ces deux dernières donnent chacune une valeur de $\frac{d\alpha}{dx(\beta}$ ou de $-\frac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$ qui, lorsqu'on peut les ramener à ne contenir que x et α, donnent la valeur de β par une équation aux différentielles partielles du premier ordre, où cette quantité est déterminée par le rapport de

ses deux dérivées, et qui peut, par conséquent, s'intégrer immédiatement comme une équation aux différentielles ordinaires. Nous avons vu qu'en effet β ne pouvait être déterminé que par une équation de cette forme, pour qu'une fonction quelconque de β y satisfît en même temps que β.

J'observerai,

1.° Qu'en mettant

$$-\frac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$$

à la place de

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta},$$

les deux dernières équations deviennent

$$\left.\begin{array}{l}\left(N\frac{dq}{d\alpha(x}+H\frac{dy}{d\alpha(x}\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha}-2\sqrt{G}\,.\,\frac{d\beta}{d\alpha(x}=0,\\ \left(H\frac{dp}{d\alpha(x}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha}-2\sqrt{G}\,.\,\frac{dq}{dx(\alpha}\,.\,\frac{d\beta}{d\alpha(x}=0,\end{array}\right\}[B]$$

qui ne contiennent plus que des dérivées relatives à x et α comme les trois autres équations, en sorte qu'on peut les combiner immédiatement avec elles;

2.° Que, dans le cas où il y a une intégrale intermédiaire, en désignant par β la quantité dont se compose la fonction arbitraire de cette intégrale, les deux équations

$$N\frac{dq}{dx(\beta}+H\frac{dy}{dx(\beta}-K+\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\beta}+M=0,$$

qui fournissent les deux équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires dont cette intégrale résulte, se trouvent remplacées, après l'intégration, par deux autres de cette forme :

$$f(x, y, z, p, q) = \beta$$
$$F(x, y, z, p, q) = \psi\beta$$

qui serviront à éliminer p et q, ainsi que leurs dérivées $\frac{dp}{dx(\alpha}$, $\frac{dq}{dx(\alpha}$ des trois équations [A]; en sorte que l'on aura trois équations entre x, y, z, α et β, qui donneront y, z, β en fonctions de x et de α, et qui pourront être traitées comme des équations à une seule variable indépendante, puisque α pourra y être considéré comme constant, et qu'alors on n'aura que quatre variables dans ces trois équations, il faudra seulement avoir soin de remplacer dans leurs intégrales les constantes arbitraires par des fonctions de α;

3.° Que cette réduction des équations qui doivent conduire à l'intégrale primitive, à des équations qu'on peut intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, dont le nombre n'est inférieur que d'une unité à celui des variables, n'a pas lieu seulement lorsque l'équation donnée est de la forme

$$Hr + 2KS + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

mais qu'elle a lieu de la même manière pour toutes les équations aux différentielles partielles du second ordre susceptibles d'une intégrale intermédiaire. On trouve aussi dans ce cas, par le procédé expliqué dans un des paragraphes précédens, deux équations relatives à x et α, qui, par le changement du signe du radical de la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, donnent deux autres équations où ce sont x et β qui sont considérés comme variables indépendantes : la seule différence est que quand les dérivées du second ordre doivent être homogènes à l'intégrale, parce que l'équation donnée contient d'autres puissances ou d'autres produits de ces dérivées que $rt - s^2$, on a nécessairement dans le calcul dix quantités, x, y, z, p, q, r, s, t, α et β, entre lesquelles, outre les quatre équations dont nous venons de parler, on a l'équation même donnée et les trois suivantes :

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} = r + s\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha} = s + t\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}.$$

Parmi ces huit équations, il y en a une qui ne contient que les quantités mêmes, x, y, z, p, q, r, s, t, et cinq où il entre seulement de plus leurs dérivées relatives à x prises en regardant x et α comme les deux variables indépendantes. Les deux autres seront relatives à x et à β; mais on pourra les ramener à avoir x et α pour variables indépendantes, comme dans le cas précédent, en y introduisant des dérivées relatives à α. S'il y a une intégrale intermédiaire, elles fourniront deux équations de la forme

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = \beta,$$

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = \psi\beta,$$

qui serviront, conjointement avec l'équation donnée, à éliminer r, s, t et leurs dérivées relatives à x des cinq autres, en sorte qu'on aura dans ce cas cinq équations du premier ordre, entre les sept variables x, y, z, p, q, α et β, qu'on pourra toujours intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce qu'elles ne contiendront point de dérivées relatives à α, ce qui réduira à six le nombre des quantités considérées comme variables dans cette intégration;

4.° Que, quand $G = K^2 - HL + NM$ est nul, les deux équations [B] se réduisent à

$$\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = 0,$$

ou

$$\beta = \chi\alpha,$$

d'où il suit que les deux fonctions arbitraires sont alors composées de

la même quantité, comme on pouvait aussi le conclure de ce que les deux valeurs trouvées d'abord pour $\frac{dy}{dx(\alpha}$ et dont on doit prendre une pour $\frac{dy}{dx(\alpha}$, et l'autre pour $\frac{dy}{dx(\beta}$, deviennent égales dans ce cas;

5.° Que, si l'on écrit les équations [B] sous cette forme

$$N\frac{dq}{d\alpha(x}+H\frac{dy}{d\alpha(x}=2\sqrt{G}.\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}$$

$$H\frac{dp}{d\alpha(x}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}=2\sqrt{G}.\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}\frac{dq}{dx(\alpha},$$

et qu'on élimine ensuite N de la première, au moyen de l'équation

$$N\frac{dq}{dx(\alpha}+H\frac{dy}{dx(\alpha}=K+\sqrt{G},$$

on obtient

$$H\left(\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{d\alpha(x}-\frac{dq}{d\alpha(x}\frac{dy}{dx(\alpha}\right)=$$

$$2\sqrt{G}.\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}\frac{dq}{dx(\alpha}-(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}=H\frac{dp}{d\alpha(x},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dp}{d\alpha(\alpha}=\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{d\alpha(x}-\frac{dq}{d\alpha(x}\frac{dy}{dx(\alpha}:$$

Nous avons vu que cette équation n'était autre chose que ce que devient

$$\frac{dp}{dy(x}=\frac{dq}{dx(y},$$

quan[redacted]

quand on prend x et α pour les deux variables indépendantes ; et puisqu'elles résultent des équations dont nous avons fait dépendre l'intégrale de l'équation donnée, il s'ensuit que, si l'on en peut tirer des valeurs de p et de q, ces valeurs seront toujours telles que $p\,dx + q\,dy$ sera une différentielle exacte, en sorte qu'en les substituant ainsi que la valeur de dy dans cette expression, on aura une valeur de dz intégrable exactement, qui conduira immédiatement à celle de z;

6.° Qu'outre les équations trouvées, l'une entre les différentielles de x, y, z, l'autre entre celles de x, p, q, on en peut former de semblables dont l'une contienne les différentielles de x, y, p, et l'autre celles de y, p, q. Il suffit pour cela d'éliminer alternativement $\frac{dq}{dx\,(\alpha}$ et le terme qui, ne contenant pas de dérivée, doit être regardé comme le coefficient de dx; on trouve ainsi

$$HN\frac{dp}{dx\,(\alpha} - H(K - \sqrt{G})\frac{dy}{dx\,(\alpha} + MN + K^2 - G = 0,$$

qui se réduit à

$$N\frac{dp}{dx\,(\alpha} - (K - \sqrt{G})\frac{dy}{dx\,(\alpha} + L = 0,$$

lorsqu'on y met

$$K^2 - HL + MN$$

au lieu de G, et

$$H(K + \sqrt{G})\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K^2 - G + MN)\frac{dq}{dx\,(\alpha} + HM\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0,$$

qui se réduit de même à

$$(K + \sqrt{G})\frac{dp}{dx\,(\alpha} + L\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0.$$

Ces équations ont aussi leurs correspondantes en dérivées relatives à-

la-fois à x et à α, qu'on obtient en y changeant le signe de $\sqrt{G}$, rapportant alors ces équations aux variables indépendantes x et β, et ramenant les dérivées relatives à ces deux variables à être exprimées en dérivées relatives à x et à α.

On trouve, en faisant le calcul comme pour les équations que nous avions d'abord obtenues, que

$$\left(N\frac{dp}{d\alpha\,(x}-(K+\sqrt{G})\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\beta}{dx\,(\alpha}+2\sqrt{G}\,.\frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha\,(x}=0,$$

et que

$$\left((K-\sqrt{G})\frac{dp}{d\alpha(x}+L\frac{dq}{d\alpha(x}+M\frac{dy}{d\alpha(x}\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha}+2\sqrt{G}\,.\frac{dp}{dx(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha(x}=0.$$

Ces quatre dernières équations n'expriment, au reste, que les mêmes relations données par les équations [A] et [B], et ne peuvent par conséquent conduire à aucun résultat qu'il ne soit possible de tirer de celles-ci; elles peuvent seulement être utiles en présentant, suivant les valeurs de H, K, L, M, N, des équations plus simples et où il soit plus facile d'apercevoir si les équations qui peuvent être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires satisfont à la condition d'intégrabilité.

Les quatre équations

$$\left(N\frac{dq}{d\alpha\,(x}+H\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}+2\sqrt{G}=0,$$

$$\left(H\frac{dp}{d\alpha\,(x}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}+2\sqrt{G}\,.\,\frac{dq}{dx\,(\alpha}=0,$$

$$\left(N\frac{dp}{d\alpha\,(x}-(K+\sqrt{G})\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}-2\sqrt{G}\,.\frac{dy}{dx\,(\alpha}=0,$$

$$\left((K-\sqrt{G})\frac{dp}{d\alpha\,(x}+L\frac{dq}{d\alpha\,(x}+M\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}-2\sqrt{G}\,.\,\frac{dp}{dx\,(\alpha}=0,$$

conduisent à des résultats remarquables, quand l'équation

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0$$

manque de quelques-uns de ses termes,

1.° Quand elle ne contient pas une des dérivées extrêmes du second ordre r ou t, on peut supposer qu'on a pris pour x la variable indépendante par rapport à laquelle z est deux fois différenciée dans cette dérivée, qui est alors représentée par r. Pour que r manque dans l'équation donnée, il faut qu'elle se réduise à $2Ks + Lt + M = 0$, et qu'on ait $H = 0$ et $N = 0$; d'où il suit que la première des quatre équations précédentes se réduit à

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -\frac{2\sqrt{G}}{0},$$

ou

$$\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0,$$

et par conséquent on tire $\beta = \varphi x$; en sorte que, dans ce cas, une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive doit être composée de la variable indépendante relativement à laquelle il faudrait différencier z deux fois pour avoir la dérivée qui manque à l'équation du second ordre, ce qui s'accorde avec ce qui a été démontré dans le troisième paragraphe.

2.° Pour que ce soit la dérivée s qu'on obtient en différenciant z alternativement par rapport à x et à y, qui manque dans l'équation donnée, il faut que cette équation soit représentée par

$$Hr + Lt + M = 0,$$

et qu'on ait par conséquent $K = 0$ et $N = 0$; alors tous les termes de la troisième des quatre équations précédentes où $\sqrt{G}$ n'entre pas s'évanouissent, en sorte qu'en supprimant ce facteur commun à tous les termes restans, on a

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -2\,\frac{\frac{dy}{dx(\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = 2\,\frac{d\alpha}{dx(y};$$

relation très-singulière entre β et y, qui a lieu dans toutes les équations du second ordre qui ne contiennent de dérivées de cet ordre que les deux extrêmes r et t à la première dimension seulement; cette relation donne sur-le-champ β, quand on connaît y en fonctions de x et de α.

Cette circonstance se rencontre dans l'équation $(r-pt)^2=q^2rt$, que nous avons prise pour exemple; en la résolvant par rapport à r, elle devient

$$r=\frac{q^2+2p\pm q\sqrt{q^2+4p}}{2}\,t=\left(\frac{q\pm\sqrt{q^2+4p}}{2}\right)^2 t,$$

et donne par conséquent

$$H=1,\quad K=0,\quad L=-\left(\frac{q\pm\sqrt{q^2+4p}}{2}\right)^2,\quad M=0,$$

$$N=0,\quad G=\sqrt{-HL}=\frac{q\pm\sqrt{q^2+4p}}{2}.$$

Après avoir trouvé $y=\alpha x+\varkappa\alpha$, il s'agissait d'obtenir β et ζ en fonctions de x et de α; nous avons été obligés, pour trouver $\frac{dy}{dx(\beta}$ qui devait servir à déterminer β, d'avoir recours à une équation du second degré dont un seul facteur devait être employé, parce que l'autre correspondait à une autre portion de l'intégrale intermédiaire que celle qui correspondait à

$$y=\alpha x+\varkappa\alpha;$$

nous aurions évité cette difficulté et trouvé immédiatement la valeur de β, en nous servant de la formule que nous avons démontré avoir toujours lieu quand l'équation donnée est de la forme

$$Hr+Lt+M=0,$$

dans laquelle rentre l'équation

$$(r-pt)^2-q^2rt=0,$$

lorsqu'on la résout par rapport à $\frac{r}{t}$; on n'a, en effet, lorsqu'il s'agit de cette dernière, qu'à tirer de l'équation

$$y=\alpha x+\varkappa\alpha,$$

cette valeur

$$\frac{d\alpha}{dx(y}=-\frac{\alpha}{x+\varkappa'\alpha};$$

et on en conclut, en vertu de cette formule,

$$\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(\,\beta} = 2\,\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(\,y} = -\,2\,\frac{\alpha}{x + \psi'\alpha},$$

en sorte que β ou une fonction quelconque de β est la constante arbitraire de l'équation

$$x\,d\alpha + 2\,\alpha\,dx + \psi'\,\alpha\,d\alpha = 0,$$

considérée comme aux différentielles ordinaires. Le facteur propre à rendre cette équation intégrable étant $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, introduirait des radicaux dans le calcul ; mais on les évite, comme nous l'avons vu, en écrivant α^2 au lieu de α, $\alpha^2\,\phi'\,\alpha$ à la place de $\psi\,\alpha$, et en partant de la valeur de y qui en résulte,

$$y = \alpha^2\,x + \alpha^2\,\phi'\,\alpha,$$

cette valeur donne

$$\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(\,y} = -\,\frac{\alpha}{2\,x + 2\,\varphi'\,\alpha + \alpha\,\varphi''\,\alpha}:$$

on a donc

$$\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(\,\beta} = -\,\frac{2\,\alpha}{2\,x + 2\,\varphi'\,\alpha + \alpha\,\varphi''\,\alpha};$$

et par conséquent

$$\beta = \int(2x\,d\alpha + 2\alpha\,dx + 2\phi'\alpha\,d\alpha + \alpha\phi''\alpha\,d\alpha) = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha,$$

comme nous l'avions trouvé.

Nous n'avons pas eu besoin de multiplier cette quantité par un facteur, parce qu'elle est évidemment une différentielle exacte par rapport à x et à α.

A l'égard de la valeur de

$$\frac{d\,z}{d\,x\,(\,\beta},$$

on doit la calculer ainsi : l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx(\beta}\right)^2 - q\,\frac{dy}{dx(\beta} - p = 0,$$

donne immédiatement

$$\frac{dz}{dx(\beta} = \left(\frac{dy}{dx(\beta}\right)^2;$$

mais de

$$\beta = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha \quad , \quad y = \alpha^2 x + \alpha^2\phi'\alpha,$$

on tire

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -\frac{2\alpha}{2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha},$$

et

$$\frac{dy}{dx(\beta} = \alpha^2 + (2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(\beta} = \alpha^2 - 2\alpha^2 = -\alpha^2,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx(\beta} = \alpha^4.$$

3.° Si l'on avait une équation qui contînt $rt - s^2$ avec une seule des dérivées extrêmes du second ordre, en supposant que t représente cette dérivée, l'équation donnée serait de la forme

$$Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

on aurait $H = 0$, $K = 0$; et la seconde des quatre équations dont nous examinons les différentes réductions serait à son tour divisible par $\sqrt{G}$, après avoir supprimé ce facteur, on en conclurait

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -2\,\frac{\frac{dq}{dx(\alpha}}{\frac{dq}{d\alpha(x}} = 2\,\frac{d\alpha}{dx(q},$$

relation aussi remarquable que la précédente, et qui donnerait de même sur-le-champ la valeur de β en x et en α, si l'on avait q exprimé par une fonction de ces deux quantités. Comme on peut prendre y au

lieu de x, et x au lieu de y, pourvu qu'on transpose aussi les lettres p et q, r et t, il s'ensuit que si l'on a une équation de cette forme

$$Hr + M + N(rt - s^2) = 0,$$

on aura

$$\frac{d\alpha}{dy(\beta} = 2\frac{d\alpha}{dy(p} .$$

Il faut, pour que ces diverses relations soient démontrées, que

$$G = K^2 - HL + MN$$

ne soit pas nul; car alors les équations dont nous les avons tirées s'évanouiraient par l'anéantissement de tous leurs termes, à cause qu'on a toujours dans ce cas $\beta = \alpha$: c'est pourquoi on ne pourrait plus déduire de ces équations les conséquences que je viens d'exposer. Elles n'auront donc nécessairement lieu qu'autant que le terme $2Ks$ ne manque pas dans l'équation $2Ks + Lt + M = 0$, ni l'un des deux termes Hr ou Lt, dans l'équation $Hr + Lt + M = 0$, ni l'un des deux termes M ou $N(rt - s^2)$, soit dans $Lt + M + N(rt - s^2) = 0$, soit dans $Hr + M + N(rt - s^2) = 0$, conditions nécessaires pour que G ne soit pas nul, et que les deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive soient par conséquent composées de deux quantités différentes.

Voyons maintenant quelle est la marche qu'on doit suivre pour déduire l'intégrale primitive des cinq équations que nous venons de trouver. On commencera par examiner quelles sont, parmi les équations qui résultent, les unes de la supposition qu'on prend pour variable indépendante x et une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires ; les autres de la supposition qu'on prend x, et l'autre de ces deux quantités, celles qui peuvent fournir plus de combinaisons satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, et l'on prendra pour ces équations celles des formules précédentes où x et β sont les deux variables indépendantes; en sorte que, si l'équation donnée est susceptible d'une intégrale intermédiaire, on pourra tirer des deux

équations relatives à x et à β qui donnent cette intégrale, deux combinaisons qui satisfassent aux conditions d'intégrabilité, et que, dans le cas contraire, on n'en pourra tirer qu'une seule ou aucune. Dans le premier cas, il sera inutile d'appliquer à ces équations la transformation par laquelle je les ai changées dans les équations que j'ai désignées par [B]; dans le second cas, il ne faudra appliquer cette transformation qu'à celle qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité ; dans le troisième, il faudra l'appliquer à toutes deux, parce que le but de cette transformation est de ramener ces équations à ne contenir, comme celles que j'ai désignées par [A], que des dérivées relatives à x et à α, et que, quand on peut les intégrer, l'intégration en fait disparaître les dérivées relatives à x et à β; de sorte qu'en remplaçant ces équations par leurs intégrales, on n'a dans le calcul que des dérivées relatives à x et à α d'une manière plus simple que par la transformation.

Dans le premier cas, on aura deux équations intégrales dont les deux constantes arbitraires seront remplacées par β et $\psi\ \beta$, et qui serviront à éliminer p, q des trois équations [A], ce qui donnera trois équations entre les quatre variables x, y, z, β, qu'on pourra par conséquent toujours intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, pourvu qu'on remplace dans leurs intégrales les constantes arbitraires par des fonctions de α. Lorsque ces constantes seront au nombre de plus de deux, l'une d'elles pourra être remplacée par α, une seconde par $\varphi\ \alpha$, et les autres devront l'être par des fonctions dérivées de $\varphi\ \alpha$ par voie d'intégration ou de différenciation. La manière dont elles en dépendront sera, comme dans les équations du premier ordre, déterminées par des relations qu'on déduira facilement de celles qui doivent exister entre z et ses dérivées, telles que

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = q\frac{dy}{d\alpha(x},$$

&c. Il faut observer que ces fonctions arbitraires ne se présentent d'abord que comme indépendantes de $\varphi\ \alpha$, et n'obligent pas par conséquent d'avoir

d'avoir recours à ces relations dans le cas où l'on détermine z par une seule de ses dérivées du premier ordre; car quand on peut avoir à-la-fois les valeurs en x et α de

$$\frac{dz}{dx(\alpha} \text{ et de } \frac{dz}{d\alpha(x},$$

on obtient la valeur de z en intégrant

$$\frac{dz}{dx(\alpha} dx + \frac{dz}{d\alpha(x} d\alpha,$$

qui est nécessairement alors une différentielle exacte, sans que cette opération introduise dans le calcul de nouvelles fonctions arbitraires qu'il faille ensuite faire dépendre de $\phi\,\alpha$ par les relations dont je viens de parler. Cette remarque, que j'aurais déjà dû faire à l'égard des équations du premier ordre lorsque je me suis occupé de leur intégration, s'applique également à la détermination de la valeur de y, lorsqu'on peut avoir à-la-fois

$$\frac{dy}{dx(\alpha} \text{ et } \frac{dy}{d\alpha(x};$$

ce n'est, au reste, qu'en l'appliquant à différens exemples qu'on peut en apprécier l'étendue et voir de quelle utilité elle peut être pour faciliter l'intégration des équations aux différentielles partielles.

Dans ce premier cas, on n'a jamais à intégrer que des équations aux différentielles ordinaires; mais il était aisé de s'y attendre, puisque ce cas est celui où la proposée est susceptible d'une intégrale intermédiaire. Un autre résultat de la théorie que j'expose ici, et qui me paraît beaucoup plus important, consiste en ce qu'on peut très-souvent ramener l'intégration de l'équation donnée à ne dépendre que d'équations aux différentielles ordinaires, dans le second cas, où les équations [B] ne peuvent fournir qu'une seule combinaison intégrable, et où par conséquent il ne peut point y avoir d'intégrale intermédiaire. Cette circonstance se présente sur-tout dans le cas où l'on peut aussi former avec les équations [A] une combinaison qui satisfasse aux conditions

d'intégrabilité. On a alors deux équations intégrées : l'une est déduite d'une équation différentielle où les variables indépendantes étaient x et β, et elle donne par conséquent la valeur de β, parce qu'il n'y avait dans cette équation différentielle que des dérivées relatives à x ; l'autre est déduite d'une équation différentielle relative à x et α, et elle donne par conséquent, pour la même raison, la valeur de α. On a, en outre, trois équations, dont deux peuvent être considérées comme aux différentielles ordinaires, et la troisième, qui est produite par la transformation expliquée ci-dessus, contient la quantité

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$-\frac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}};$$

mais cette circonstance n'empêche pas d'en déduire souvent l'intégrale, après qu'on a éliminé p et q au moyen des deux équations qui donnent les valeurs de α et de β.

Je choisirai, pour exemple de ce cas, l'équation de la surface *minimum*,

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

qui me fournira l'occasion de faire quelques remarques sur la manière dont on doit traiter les équations dont nous avons fait dépendre l'intégration des équations aux différentielles partielles du second ordre de la forme

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0:$$

on a dans cet exemple

$$H=1+q^2,\quad K=-pq,\quad L=1+p^2,\quad M=0,\quad N=0,$$

$$G = -1 - p^2 - q^2;$$

et les quatre équations que nous avons obtenues en faisant pour abréger

$$K^2 - HL + MN = G,$$

deviennent, après les avoir divisées par $1 + q^2$,

$$\frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx(\alpha} - \frac{pq + \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\,\frac{dq}{dx(\alpha} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx(\beta} + \frac{pq + \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx(\beta} - \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\,\frac{dq}{dx(\beta} = 0.$$

En joignant les deux premières à $\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha}$; on aura trois équations où x et α seront les variables indépendantes. Il faudra ramener les deux autres à ne contenir que des dérivées relatives à x et à α, et l'on pourrait le faire au moyen de la transformation générale qui nous a donné les équations [B]; mais comme la dernière peut être intégrée exactement, on ne devra se servir de cette transformation que pour l'équation précédente, qu'elle changera en

$$\frac{dy}{d\alpha(x}\,\frac{d\beta}{dx(\alpha} - \frac{2\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\,\frac{d\beta}{d\alpha(x} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dy}{d\alpha(x}\,\frac{d\alpha}{dx(\beta} + \frac{2\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} = 0;$$

quant à la dernière, après l'avoir écrite ainsi :

$$\frac{dp}{dq(\beta} = \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}.$$

on verra qu'on peut l'intégrer comme une équation aux différentielles ordinaires : le moyen le plus simple pour y parvenir consiste à en différencier les deux membres en remplaçant dans le second

$$\frac{dp}{dq\,(\beta}$$

par sa valeur, ce qui donne

$$\frac{d^2p}{dq^2\,(\beta} = \frac{q+\frac{p}{\sqrt{-1-p^2-q^2}}}{1+q^2}\cdot\frac{pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}$$

$$+\frac{(1+q^2)\left(p+\frac{q}{\sqrt{-1-p^2-q^2}}\right)-2q\,(pq-\sqrt{-1-p^2-q^2})}{(1+q^2)^2}$$

$$=\frac{\frac{q(1+p^2+q^2)}{\sqrt{-1-p^2-q^2}}+q\sqrt{-1-p^2-q^2}}{(1+q^2)^2}=0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dp}{dq}=\beta,$$

et par conséquent

$$\beta=\frac{pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}.$$

Cette valeur de β une fois obtenue, on n'aura plus à traiter que les quatre équations

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}+\frac{pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}=0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha}-\frac{pq+\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\cdot\frac{dq}{dx\,(\alpha}=0,$$

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x}\,\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}+\frac{2\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}=0,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha}=p+q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}.$$

La première devient

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \beta = 0,$$

la seconde s'intègre comme celle qui nous a donné la valeur de β, et l'on a

$$\alpha - \beta = \frac{2\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2},$$

ce qui change la troisième en

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x}\;\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = \beta - \alpha,$$

d'où il faut éliminer y en y considérant $\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}$ comme l'inconnue qui doit être déterminée par l'équation résultant de cette élimination. En représentant cette inconnue par v, on aura

$$v\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \beta - \alpha,$$

équation d'où l'on tire, lorsqu'on la différencie par rapport à x, en y regardant x et α comme les deux variables indépendantes,

$$\frac{dv}{dx\,(\alpha}\;\frac{dy}{d\alpha\,(x} + v\,\frac{d^2y}{dx\,d\alpha} = \frac{d\beta}{dx\,(\alpha};$$

mais l'autre équation

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \beta = 0$$

donne

$$\frac{d^2y}{dx\,d\alpha} = -\frac{d\beta}{d\alpha\,(x}:$$

et par conséquent

$$\frac{dv}{dx\,(\alpha}\;\frac{dy}{d\alpha\,(x} = v\,\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} + \frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = 0,$$

puisque

$$v=\frac{d\alpha}{dx(\beta}=-\frac{dβ}{dx(\alpha}:\frac{d\beta}{d\alpha(x}$$

$\frac{dy}{d\alpha(x}$ ne pouvant être nul, il faudra qu'on ait

$$\frac{dv}{dx(\alpha}=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta}=v=\gamma\alpha,$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{d\alpha(\beta}=\frac{1}{\gamma\alpha}.$$

En représentant cette fonction par $\varphi''\alpha$, ce qui donnera $v=\frac{1}{\varphi''\alpha}$ on aura

$$x=\varphi'\alpha+\psi'\beta;$$

ainsi

$$dx=\varphi''\alpha\, d\alpha+\psi''\beta\, d\beta;$$

et comme on a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=-\beta,$$

$$\frac{dy}{d\alpha(x}=\frac{\beta-\alpha}{v}=(\beta-\alpha)\varphi''\alpha,$$

il viendra en réduisant

$$dy=-\beta\psi''\beta\, d\beta-\alpha\varphi''\alpha\, d\alpha,$$

qui donne

$$y = \psi\beta - \beta\psi'\beta + \varphi\alpha - \alpha\varphi'\alpha.$$

En substituant les valeurs que nous venons de trouver pour dx et dy dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on obtient

$$dz = (p - \alpha q)\,\varphi''\alpha\,d\alpha + (p - \beta q)\,\psi''\beta\,d\beta,$$

d'où il faut éliminer p et q au moyen des deux équations qui donnent les valeurs de α et de β, on en tire

$$(1 + q^2)\alpha^2 - 2pq\alpha + 1 + p^2 = 0$$
$$(1 + q^2)\beta^2 - 2pq\beta + 1 + p^2 = 0;$$

ainsi

$$p - \alpha q = \pm\sqrt{-1 - \alpha^2}$$
$$p - \beta q = \pm\sqrt{-1 - \beta^2},$$

et par conséquent

$$z = \pm\int\varphi''\alpha\,d\alpha\sqrt{-1 - \alpha^2} \pm \int\psi''\beta\,d\beta\sqrt{-1 - \beta^2},$$

dont la réunion avec les deux équations

$$x = \varphi'\alpha + \psi'\beta$$
$$y = \varphi\alpha - \alpha\varphi'\alpha + \psi\beta - \beta\psi'\beta,$$

exprime, comme on sait, l'intégrale de la proposée. Le double signe de la valeur de z vient de ce qu'on peut toujours changer le signe de z sans qu'elle cesse de satisfaire à l'équation donnée, puisque celle-ci ne contient dans tous ses termes que des dérivées de z en nombre impair, en sorte qu'ils changent tous de signe à-la-fois quand on change celui de z.

§. III.

Sur quelques transformations des équations aux différentielles partielles du second ordre, et sur la manière dont on doit les intégrer dans le cas où les deux systèmes d'équations aux différentielles ordinaires dont leurs intégrales dépendent se réduisent à un seul.

M. Legendre a fait connaître une transformation par laquelle on ramène l'équation du second ordre

$$Rr + Ss + Tt = 0$$

à une équation linéaire du même ordre, où p et q sont les deux variables indépendantes, lorsque R, S, T, ne contiennent que ces deux dernières quantités. J'ai reconnu qu'il existe deux transformations analogues, qu'on obtient, l'une en prenant x et q, et l'autre en prenant y et p pour variables indépendantes, et qui peuvent, comme celle qu'a donnée M. Legendre, être appliquées à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

sans que cette équation change de forme. Pour donner une idée claire de ces deux transformations, je commencerai par rappeler la transformation de M. Legendre, en en calculant les formules à l'aide de la notation dont je fais usage dans ce mémoire. On sait qu'en prenant p et q pour les deux variables indépendantes, on doit, pour obtenir ces formules, considérer la quantité $px + qy - z$ comme la fonction qui en dépend en vertu de la transformée qu'il s'agit d'obtenir. Représentons par z' cette quantité, et par p', q', r', s', t', ses dérivées prises en faisant varier alternativement p et q, que nous représenterons par x' et y'; nous aurons d'abord

$$p' = x$$
$$q' = y,$$

à cause que

$$dz' = x\,dp + y\,dq,$$

ensuite

$$r' = \frac{dx}{dp\,(q} = \frac{1}{\frac{dp}{dx\,(q}} = \frac{1}{r + s\,\frac{dy}{dx\,(q}} = \frac{t}{rt - s^2}\ *;$$

$$s' = \frac{dx}{dq\,(p} = \frac{1}{\frac{dq}{dx\,(p}} = \frac{1}{s + t\,\frac{dy}{dx\,(p}} = -\frac{s}{rt - s^2},$$

$$t' = \frac{dy}{dq\,(p} = \frac{1}{\frac{dq}{dy\,(p}} = \frac{1}{s\,\frac{dx}{dy\,(p} + t} = \frac{r}{rt - s^2};$$

on tire de ces valeurs

$$r'\,t' - s'^2 = \frac{1}{rt - s^2}$$

et par conséquent

---

* Parce que, d'après les formules connues,

$$\frac{dy}{dx\,(q} = -\frac{\frac{dq}{dx\,(y}}{\frac{dq}{dy\,(x}} = -\frac{s}{t},$$

$$\frac{dy}{dx\,(p} = -\frac{\frac{dp}{dx\,(y}}{\frac{dp}{dy\,(x}} = -\frac{r}{s},$$

$$\frac{dx}{dy\,(p} = \frac{1}{\frac{dy}{dx\,(p}} = -\frac{s}{r}.$$

$$r = \frac{t'}{r'\,t' - s'^2},$$

$$s = -\frac{s'}{r'\,t' - s'^2},$$

$$t = \frac{r'}{r'\,t' - s'^2},$$

$$r\,t - s^2 = \frac{1}{r'\,t' - s'^2},$$

en substituant ces formules dans l'équation

$$H r + 2 K s + L t + M + N (r t - s^2) = 0,$$

on aura

$$L r' - 2 K s' + H t' + N + M (r' t' - s'^2) = 0,$$

où l'on devra remplacer respectivement dans les coefficiens les lettres

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,$$

par

$$p',\ q',\ p' x' + q' y' - z',\ x',\ y'.$$

Cette transformation ne change point la forme de l'équation donnée, et il est à remarquer que la valeur de la quantité $K^2 - H L + M N$ que nous avons nommée G, reste la même, puisque les seuls changemens qu'éprouve cette équation se réduisent à celui du signe de K, et à la permutation de H avec L et de M avec N.

Prenons maintenant x et q, que nous représenterons par x'' et y'' pour les deux variables indépendantes, et $z'' = z - q y$ pour la fonction, en représentant par p'', q'', r'', s'', t'', les dérivées de cette fonction prises en faisant varier alternativement x et q; nous aurons d'abord

$$p'' = p,$$

$$q'' = - y,$$

à cause que $d z'' = p\, d x - y\, d q$; ensuite

$$r'' = \frac{d p}{d x\,(q} = r + s \frac{d y}{d x\,(q} = r - \frac{s^2}{t},$$

$$s'' = - \frac{d y}{d x\,(q} = \frac{s}{t},$$

$$t'' = - \frac{d y}{d q\,(x} = - \frac{1}{\frac{d q}{d y\,(x}} = - \frac{1}{t},$$

d'où l'on tire

$$t = - \frac{1}{t''},$$

$$s = - \frac{s''}{t''},$$

$$r = r'' + \frac{s^2}{t} = \frac{r''\,t'' - s''^2}{t''},$$

$$r\,t - s^2 = - \frac{r''\,t'' - s''^2}{t''^2} - \frac{s''^2}{t''^2} = - \frac{r''}{t''};$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$H r + 2 K s + L t + M + N (r t - s^2) = 0,$$

donnent, en changeant les signes,

$$N r'' + 2 K s'' - M t'' + L - H (r''\,t'' - s''^2) = 0,$$

qui est encore de la même forme, et où la valeur de la quantité que j'ai nommée G n'a point changé, parce qu'en ôtant de K^2 le produit des coefficiens de r'' et de t'' dans l'équation précédente, et en ajoutant au reste celui du coefficient de $r''\,t'' - s''^2$ par le terme qui ne contient point de dérivées du second ordre, on a pour résultat $K^2 + M N - H L$, qui est égal à la quantité de $K^2 - H L + M N$, qu'on déduit, par les mêmes opérations, de l'équation donnée

$$H r + 2 K s + L t + M + N (r t - s^2) = 0.$$

Il est évident que, dans la transformée que nous venons d'obtenir, il faut remplacer respectivement les lettres

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,$$

par

$$x'',\ -q'',\ z''-q''y'',\ p'',\ y'',$$

en sorte que si les coefficiens de l'équation ne renferment que x et q, ceux de la transformée ne contiendront que les deux variables indépendantes de cette transformée.

En prenant de même p et y pour les deux variables indépendantes, $z-px$ pour la fonction, et en représentant cette fonction par z''' et ses dérivées, relatives à $p=x'''$ et à $y=y'''$, par p''', q''', r''', s''', t''', on trouvera par un calcul absolument semblable au précédent

$$p'''=-x,$$
$$q'''=q,$$
$$r'''=-\frac{1}{r},$$
$$s'''=\frac{s}{r},$$
$$t'''=t-\frac{s^2}{r},$$

ainsi

$$r=-\frac{1}{r'''},$$
$$s=-\frac{s'''}{r'''},$$
$$t=\frac{r'''t'''-s'''^2}{r'''},$$
$$rt-s^2=-\frac{t'''}{r'''},$$

valeurs qui changent l'équation donnée en

$$Mr'''-2Ks'''-Nt'''-H+L(r'''t'''-s'''^2)=0,$$

où il ne s'agit plus que de remplacer respectivement les lettres

$$x, y, z, p, q,$$

par

$$-p''', y''', z''' - p''' x''', x''', q''',$$

pour avoir une équation de même forme que la proposée, dans laquelle p et y seront les deux variables indépendantes, et dont les coefficiens ne renfermeront que ces variables, lorsque ceux de la proposée ne contiendront que p et y.

Il est à remarquer que ces diverses transformations ne peuvent servir qu'à simplifier le calcul, quand on cherche à déduire l'intégrale des formules que j'ai données dans un des paragraphes précédens, savoir :

$$N\frac{dq}{dx(\alpha} + H\frac{dy}{dx(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\alpha} + (K - \sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

$$N\frac{dq}{dx(\beta} + H\frac{dy}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\beta} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx(\beta} + M = 0;$$

car il est aisé de voir qu'en appliquant ces quatre formules aux trois transformées, dans lesquelles nous avons changé l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

et en remplaçant ensuite dans les équations qui en résultent

$$x', y', z', p', q';$$
$$x'', y'', z'', p'', q'';$$
$$x''', y''', z''', p''', q''',$$

par les valeurs de ces quantités, en x, y, z, p, q, qui correspondent à la transformée d'où l'on est parti, on trouve quatre équations qui

rentrent identiquement dans les quatre précédentes, ou dans ces quatre-ci, qui, d'après ce qui a été démontré plus haut, en sont une suite nécessaire :

$$N \frac{dp}{dx(\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{dy}{dx(\alpha} + L = 0,$$

$$(K + \sqrt{G}) \frac{dp}{dx(\alpha} + L \frac{dq}{dx(\alpha} + M \frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

$$N \frac{dp}{dx(\beta} - (K + \sqrt{G}) \frac{dy}{dx(\beta} + L = 0,$$

$$(K - \sqrt{G}) \frac{dp}{dx(\beta} + L \frac{dq}{dx(\beta} + M \frac{dy}{dx(\beta} = 0.$$

Pour donner un exemple de ce calcul qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté, appliquons la formule

$$N \frac{dq}{dx(\alpha} + H \frac{dy}{dx(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0$$

à la première transformée; nous aurons

$$M \frac{dq'}{dx'(\alpha} + L \frac{dy'}{dx'(\alpha} + K - \sqrt{G} = 0,$$

et à cause de $x' = p$, $y' = q$, $q' = y$, il viendra

$$M \frac{dy}{dp(\alpha} + L \frac{dq}{dp(\alpha} + K - \sqrt{G} = 0,$$

qui est évidemment la même chose que

$$(K - \sqrt{G}) \frac{dp}{dx(\beta} + L \frac{dq}{dx(\beta} + M \frac{dy}{dx(\beta} = 0,$$

parce que rien ne détermine quelle est celle des deux quantités dont se composent les deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive qui a été désignée par α, et quelle est celle qui l'a été par β, en sorte qu'on peut toujours écrire β à la place de α et réciproquement.

Mais ces transformations présentent des avantages beaucoup plus importans, quand l'intégrale d'une équation aux différentielles par-

tielles du second ordre ne peut être exprimée qu'en intégrale définie, parce que l'on ne connaît point, dans le plus grand nombre des cas, de procédé qui conduise directement à ces sortes d'intégrales, et qu'on peut par ces transformations ramener une équation qu'on ne sait point intégrer directement à une autre dont l'intégrale soit connue ; pour en donner un exemple bien simple, je prendrai l'équation

$$p\, t + 1 = 0,$$

dont l'intégration présente d'ailleurs des circonstances remarquables, et nous fera connaître une espèce particulière d'intégrales du premier ordre renfermant des intégrales définies, et qui conduisent immédiatement à l'intégrale primitive.

Dans cet exemple, on a

$$H = 0, \quad K = 0, \quad L = p, \quad M = 1, \quad N = 0,$$

d'où il suit que la seconde transformée est

$$- t'' + p'' = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 z''}{d q^2 (x} = \frac{d z''}{d x (q} ;$$

l'intégrale de cette équation est, comme l'a fait voir M. *de Laplace*,

$$z'' = \int e^{-u^2} d u\, \varphi (q + 2 u \sqrt{x}), \quad \left[u = -\frac{1}{0}, \ u = \frac{1}{0} \right];$$

et comme

$$z'' = z - q y,$$

il s'ensuit que

$$z = q y + \int e^{-u^2} d u\, \varphi (q + 2 u \sqrt{x}), \quad \left[u = -\frac{1}{0}, u = \frac{1}{0} \right];$$

cette équation contenant x, y, z, q, peut être regardée comme une

intégrale du premier ordre de l'équation donnée $p\,t + 1 = 0$, on peut la vérifier de la manière suivante.

En différentiant cette équation, en y faisant varier alternativem x et y, on aura

$$p = [y + \int e^{-u^2} du\, \varphi'(q + 2u\sqrt{x})]s + \frac{1}{\sqrt{x}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi'(q + 2u\sqrt{}$$

et

$$q = q + [y + \int e^{-u^2} du\, \varphi'(q + 2u\sqrt{x})]\,t,$$

où en réduisant

$$y + \int e^{-u^2} du\, \varphi'(q + 2u\sqrt{x}) = 0,$$

cette équation réduit la valeur de p à

$$p = \frac{1}{\sqrt{x}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi'(q + 2u\sqrt{x}) = \int e^{-u^2} du\, \varphi''(q + 2u\sqrt{}$$

parce que le terme qu'on trouve hors du signe $\int$ en intégrant partie, savoir,

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-u^2} \varphi'(q + 2u\sqrt{x}),$$

est nul aux deux limites.

La même équation donne en la différentiant par rapport seul,

$$1 + t \int e^{-u^2} du\, \varphi''(q + 2u\sqrt{x}) = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement la proposée

$$p\,t + 1 = 0,$$

en éliminant

$$\int e^{-u^2} du\, \varphi''(q + 2u\sqrt{x}).$$

L'équation que nous venons d'obtenir

$$z = qy + \int e^{-u^2} du\, \varphi(q + 2u\sqrt{x}),\ \left[u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}\right],$$

qui satisfait à l'équation proposée comme une intégrale du premier ordre, peut aussi être considérée comme une transformation de l'intégrale primitive, parce que, si on écrit α à la place de q, et qu'on réunisse l'équation résultante

$$z = \alpha y + \int e^{-u^2} du\, \varphi(\alpha + 2u\sqrt{x}),\ \left[u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}\right],$$

avec sa dérivée partielle relative à α, savoir,

$$y + \int e^{-u^2} du\, \varphi'(\alpha + 2u\sqrt{x}),\ \left[u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}\right],$$

on aura un système de deux équations, qui sera l'intégrale générale de la proposée, qu'on pourra vérifier comme celle que nous venons de trouver entre x, y, z, q, et dont cette dernière résulte immédiatement, lorsqu'on élimine α entre l'intégrale primitive et ses dérivées du premier ordre, qui donnent évidemment $\alpha = q$.

Il est aisé de trouver d'autres exemples de ces équations du premier ordre contenant des intégrales définies avec des dérivées de z du premier ordre, qu'on pourrait considérer comme des intégrales premières des équations différentielles partielles du second ordre, mais qui ont la propriété de conduire à l'intégrale primitive sans nouvelle intégration, et par une simple transformation : soit, par exemple, l'équation

$$r + 2qs + q^2 t = X,$$

où X est une fonction de x seul, on aura

$$H = 1,\quad K = q,\quad L = q^2,\quad M = -X,\quad N = 0,$$

et, par conséquent, $G = 0$, ce qui réduira les formules générales aux trois équations

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha},$$

$$\frac{dy}{dx(\alpha} - q = 0,$$

$$\frac{dp}{dx(\alpha} + q\frac{dq}{dx(\alpha} - X = 0,$$

dont la dernière seule est intégrable, et donne

$$p + \frac{q^2}{2} - \int X dx + \alpha = 0.$$

On tire de cette dernière équation

$$\frac{dp}{d\alpha(x} + q\frac{dq}{d\alpha(x} + 1 = 0,$$

et à cause de $q = \frac{dy}{dx(\alpha}$,

$$\frac{dp}{d\alpha(x} = -1 - \frac{dq}{d\alpha(x}\frac{dy}{dx(\alpha};$$

mais nous avons vu qu'on a toujours

$$\frac{dp}{d\alpha(x} = \frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dq}{d\alpha(x}\frac{dy}{dx(\alpha};$$

ainsi

$$\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{d\alpha(x} = -1,$$

ou

$$\frac{dy}{d\alpha(x}\frac{d^2y}{dx^2(\alpha} + 1 = 0,$$

en comparant cette équation à $pt + 1 = 0$, que nous venons d'intégrer, on verra qu'elle a pour intégrable primitive ce système de deux équations, où j'ai écrit φ' au lieu de φ, pour rendre plus faciles les calculs suivans :

$$y = \beta x + \int e^{-u^2} du\, \varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0, \; \left[u = -\tfrac{1}{0},\; u = \tfrac{1}{0}\right],$$

$$x + \int e^{-u^2} du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0;$$

le premier membre de la seconde étant le coefficient de $d\beta$ dans la différentielle de la première, on en tirera

$$q = \frac{dy}{dx\,(\alpha} = \beta,$$

$$p = \int X dx - \frac{q^2}{2} - \alpha = \int X dx - \alpha - \frac{1}{2}\beta \frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \int X dx - \alpha + \frac{1}{2}\beta \frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

et par conséquent

$$z = \iint X dx^2 - \alpha x + \frac{1}{2}\beta y - \frac{1}{2}\int y\, d\beta.$$

Comme, dans l'intégration de $y\,d\beta$, α doit être considéré comme constant, et que les deux équations primitives qu'on vient d'obtenir, donnent

$$y = \int e^{-u^2} du\, \varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) - \beta\int e^{-u^2} du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

on trouvera aisément,

$$\int y\, d\beta = 2\int e^{-u^2} du\, \varphi(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) - \beta\int e^{-u^2} du\, \varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

et, par conséquent,

$$z = \iint X dx - \alpha x + \frac{1}{2}\beta y - \int e^{-u^2} du\, \varphi(\beta + 2\sqrt{\alpha}) + \frac{\beta}{2}\int e^{-u^2} du\, \varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha});$$

mais on a

$$\int e^{-u^2} du\, \varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = y - \beta x,$$

ainsi,

$$z = \int\int X\,dx - \left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right)x + \beta y - \int e^{-u^2}\,du\,\varphi(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

dont la réunion avec les deux équations

$$y = \beta x + \int e^{-u^2}\,du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

et

$$x + \int e^{-u^2}\,du\,\varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

forme un système de trois équations qui est l'intégrale primitive de la proposée. Il semble d'abord qu'on aurait rendu cette intégrale plus générale, en ajoutant à la valeur de $\int y\,d\beta$ une fonction arbitraire de α, qui se serait aussi trouvée dans celle de z; mais il est aisé de voir que, si on le faisait, et qu'on déterminât cette fonction de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

on trouverait que cette fonction doit être nulle.

Cette intégrale se vérifie par un calcul très-simple, lorsqu'on fait attention que la seconde des trois équations dont elle se compose est la dérivée de la première, prise en ne faisant varier que β, et que la troisième, qui, d'après ce que nous avons vu, est aussi la dérivée par rapport à β seul de la seconde, est en même temps la dérivée de la première, prise en ne faisant varier que α; car on trouve d'abord pour cette dérivée,

$$0 = x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}\,u\,du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha})$$

qui devient, en intégrant par parties, et en se rappelant qu'aux deux limites $e^{-u^2} = 0$,

$$x + \int e^{-u^2} du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

c'est-à-dire, précisément la troisième équation. Cela posé, en différenciant les deux premières par rapport à x et à y, on aura

$$p = \int X dx - \alpha - \frac{\beta^2}{2}, \quad q = \beta,$$

$$0 = \beta + \frac{d\alpha}{dx(y} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$1 = \frac{d\alpha}{dy(x} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \int X dx - p - \frac{q^2}{2};$$

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}} = -\beta = -q,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{X - r - qs}{s + qt} = q,$$

d'où résulte immédiatement l'équation donnée,

$$X = r + 2qs + q^2 t.$$

Outre la propriété remarquable que présente l'intégrale de

$$r + 2qs + q^2 t = X,$$

d'être composée de trois équations, dont deux sont les dérivées partielles de la troisième; l'une relativement à β, l'autre par rapport à α, et qui sont telles que cette dernière est en même temps la dérivée de la précédente prise en différenciant une seconde fois par rapport à β, elle conduit à une intégrale intermédiaire analogue à celle que nous

avons trouvée pour l'équation $pt+1=0$, et qu'on obtient en éliminant β des deux équations de l'intégrale primitive qui donnent les valeurs de y et de z, au moyen des dérivées du premier ordre de cette intégrale.

Nous avons vu, en la vérifiant, qu'on en tire $\beta=q$; nous aurons donc

$$z=qy+\int\int Xdx-\left(\frac{q^2}{2}+\alpha\right)x-\int e^{-u^2}du\varphi(q+2u\sqrt{\alpha}),\ \left[u=-\frac{1}{0},\ =\frac{1}{0}\right],$$

et

$$y=qx+\int e^{-u^2}du\varphi'(q+2u\sqrt{\alpha}),\ \left[u=-\frac{1}{0},\ u=\frac{1}{0}\right],$$

pour cette intégrale première, qu'il est aisé de vérifier de la manière suivante. Comme la seconde équation est la dérivée partielle de la première, prise en n'y faisant varier que q, on en tire

$$p=\int Xdx-\frac{q^2}{2}-\alpha-\left[x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}udu\varphi'(q+2u\sqrt{\alpha})\right]\frac{d\alpha}{dx\,(y},$$

$$q=q-\left[x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}udu\varphi'(q+2u\sqrt{\alpha})\right]\frac{d\alpha}{dy\,(x},$$

$$0=q+\left[x+\int e^{-u^2}du\varphi''(q+2u\sqrt{\alpha})\right]s+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{d\alpha}{dx\,(y}\int e^{-u^2}udu\varphi''(q+2u\sqrt{\alpha}),$$

$$1=\left[x+\int e^{-u^2}du\varphi''(q+2u\sqrt{\alpha})\right]t+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{d\alpha}{dy\,(x}\int e^{-u^2}udu\varphi''(q+2u\sqrt{\alpha});$$

la seconde de ces quatre équations réduit la première à

$$\alpha=\int Xdx-p-\frac{q^2}{2},$$

et à cause de

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}udu\varphi'(q+2u\sqrt{\alpha})=\int e^{-u^2}du\varphi''(q+2u\sqrt{\alpha}),$$

elle réduit les autres à

$$q = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{d\alpha}{dx\,(y} \cdot \int e^{-u^2}\, u\, du\, \varphi''(q + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{d\alpha}{dy\,(x} \int e^{-u^2}\, u\, du\, \varphi''(q + 2u\sqrt{\alpha}),$$

ce qui donne

$$q = -\frac{\frac{d\alpha}{d\alpha\,(x}}{\frac{d\alpha}{d\alpha\,(y}} = \frac{X - r - qs}{s + qt},$$

et par conséquent l'équation proposée

$$r + 2qs + q^2 t = X.$$

Il est évident que la quantité dont se compose la fonction arbitraire peut être écrite ainsi, $\beta + \alpha u$ ou $q + \alpha u$, pourvu qu'on remplace α par $\frac{\alpha^2}{4}$ dans la valeur de z. Les propriétés que nous a offertes l'intégrale précédente, se retrouvent dans une classe entière d'intégrales dont un examen particulier pourrait conduire à des résultats utiles aux progrès du calcul intégral aux différentielles partielles, mais s'écarterait absolument de l'objet de ce paragraphe.

---

§. IV.

MÉTHODE pour intégrer les Équations aux différentielles partielles du second Ordre dans lesquelles les dérivées de cet Ordre n'entrent qu'à la première puissance, par l'évanouissement des termes qui contiennent ces dérivées.

LA méthode connue pour l'intégration des équations du premier ordre où p et q n'entrent qu'à la première puissance, se réduit à changer une des deux variables indépendantes, de manière qu'il ne reste plus qu'une des deux dérivées du premier ordre dans les équations aux différentielles partielles dont l'intégration doit conduire à celle de la proposée. Ces équations, ne contenant alors que des dérivées relatives à une des deux variables indépendantes, peuvent être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires.

Si l'on compare à cette méthode celle que M. le marquis de Laplace a donnée pour les équations linéaires du second ordre, on verra que la première opération qu'elle suppose consiste aussi à faire évanouir deux des termes où entrent les différentielles de cet ordre ; en sorte qu'il n'en reste qu'une seule dans l'équation du second, qu'il faut ensuite intégrer conjointement avec deux équations du premier ordre. La dérivée du second ordre qui reste dans cette transformée, est, comme on sait, r ou t, c'est-à-dire une des deux extrêmes, quand les coefficiens de r, s, t sont ceux d'un carré parfait, et la dérivée intermédiaire s, quand cette condition n'a pas lieu.

Je me propose, dans ce paragraphe, de ramener, lorsque cela est possible, l'intégration des équations du second ordre où r, s, t, n'entrent qu'à la première puissance, à celle de deux équations du premier ordre qu'on puisse intégrer, comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, et d'une équation du second ordre qui ne contienne qu'une seule dérivée de cet ordre ; savoir, une des dérivées extrêmes,

extrêmes, quand les coefficiens de r, s, t, dans l'équation donnée, sont ceux d'un carré parfait, et la dérivée intermédiaire du second ordre, lorsque ces coefficiens ne satisfont pas à cette condition. Il ne reste plus ensuite qu'à intégrer cette équation, et il peut arriver deux cas :

1.° Celui où l'équation donnée est susceptible d'une intégrale du premier ordre ; alors la transformée le sera aussi, et on aura cet avantage de pouvoir le reconnaître immédiatement, parce que la transformée ne contenant qu'une seule dérivée de l'ordre le plus élevé, elle rentrera dans l'une des deux fonctions

$$t = f\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

ou

$$s = f\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

et qu'il est toujours facile de voir si elles sont susceptibles d'une intégrale du premier ordre, la première n'en pouvant avoir une que quand p n'y entre pas, et la seconde que quand l'équation

$$\frac{dq}{dx} = f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ q\right)$$

satisfait à la condition d'intégrabilité, en y regardant y comme constant, ou que l'équation

$$\frac{dp}{dy} = f\left(x,\ y,\ z,\ p,\ \frac{dz}{dy}\right),$$

satisfait à la même condition, en y considérant x comme une constante.

2.° Le cas où l'équation donnée n'est pas susceptible d'une intégrale du premier ordre : la méthode que j'emploie alors, consiste à exprimer la valeur de z par des intégrales définies, soit qu'elle ne puisse être représentée autrement, soit qu'elle puisse l'être par un nombre

fini d'intégrales indéfinies, dérivées les unes des autres par voie de différenciation ou d'intégration. Cette dernière forme étant regardée comme plus simple que celle des équations primitives à intégrales définies, cette méthode d'intégration exige, pour être complète, qu'on ait un moyen de transformer les intégrales définies en intégrales de cette espèce, lorsque cela est possible, et de reconnaître celles qui en sont susceptibles. Cette transformation, au reste, ne présente pas de très-grandes difficultés, et je me propose de donner ailleurs un procédé général pour y parvenir : mais l'exposition et la démonstration de ce procédé m'écarteraient trop de l'objet principal de ce mémoire ; c'est pourquoi je me bornerai, quant à présent, à montrer comment on doit s'y prendre pour ramener les équations aux différentielles partielles du second ordre, où les dérivées de cet ordre n'entrent qu'à la première puissance, à l'une des deux formes,

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

ou

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

suivant que les coefficiens de r, s, t, dans l'équation donnée, sont ou ne sont pas ceux d'un carré parfait. Je vais appliquer la méthode que j'emploie pour cela à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0;$$

cette méthode peut aussi être appliquée, avec quelques modifications, à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

et servir à la ramener à l'une des deux mêmes formes, suivant que la quantité $K^2 - HL + MN$ est nulle ou ne l'est pas: mais pour rendre plus simple l'exposition de cette méthode et les démonstrations qui y sont relatives, j'ai cru devoir me borner à la

formule

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0;$$

où les dérivées du second ordre ne se trouvent qu'à la première puissance. En prenant x pour une des deux variables indépendantes, et représentant l'autre d'abord par α et ensuite par β, on trouvera, en faisant $N = 0$ dans les formules que j'ai données pour l'intégration de l'équation,

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

que celle de

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

dépend du système des trois équations

$$H \frac{dy}{dx(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

$$H \frac{dp}{dx(\alpha} + (K - \sqrt{G}) \frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q \frac{dy}{dx(\alpha},$$

ou de celui-ci, composé de trois équations semblables,

$$H \frac{dy}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

$$H \frac{dp}{dx(\beta} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{dx(\beta} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\beta} = p + q \frac{dy}{dx(\beta},$$

en faisant pour abréger

$$K^2 - HL = G.$$

Si cette quantité était nulle, ces deux systèmes se réduiraient à un seul ; savoir :

$$H \frac{dy}{dx(\alpha} - K = 0,$$

$$H \frac{dp}{dx(\alpha} + K \frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q \frac{dy}{dx(\alpha}.$$

Lorsque l'équation est linéaire, H, K, L, et par conséquent G, ne contiennent que x et y; il y a donc dans chaque système une équation où entrent uniquement ces deux variables, et qu'on intègre, par conséquent, comme si elles étaient aux différentielles ordinaires. Cette intégration donne en fonctions de x et y la valeur de α, lorsque $K^2 - HL = 0$, et celles de α et de β, quand cette condition n'a pas lieu. C'est au moyen de ces valeurs, en prenant dans le premier cas x et y, et dans le second cas α et β pour variables indépendantes, qu'on ramène les équations linéaires où $K^2 - HL = 0$, à la forme

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

et les autres à la forme

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

Pour pouvoir étendre cette transformation à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

lorsque H, K, L, M, sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, il faut de même que, dans le premier cas, on puisse former dans chaque système une combinaison intégrable, afin de pouvoir déterminer les valeurs de α et β en fonctions de ces quantités, et que dans le second on puisse en former une qui donne la valeur de α aussi en fonctions de x, y, z, p, q. Il semble alors que les équa-

tions qu'on se propose d'intégrer pourraient être ramenées à la forme desirée, en prenant de même α ou β ou x, et α pour les deux variables indépendantes; mais il se présente une difficulté qui paraît d'abord insurmontable : au lieu d'une équation aux différentielles partielles entre trois variables dont deux indépendantes, on aurait, en s'y prenant ainsi, plusieurs équations simultanées qu'il est aisé de déduire des formules que j'ai données dans le mémoire déjà cité *, mais qui ne peuvent conduire à une méthode générale d'intégration, parce que la théorie des équations simultanées aux différentielles partielles est encore au berceau. J'ai trouvé le moyen de faire disparaître cette difficulté, en déterminant une fonction dont la valeur soit telle, qu'elle dépende des nouvelles variables indépendantes, par une seule équation du second ordre, qui ne contienne que ces trois quantités et les dérivées de la première prises par rapport aux deux autres, et qui soit de la forme

---

* Lorsque $K^2 - HL = 0$, ces équations simultanées sont celles dont se compose le système de trois équations où x et α sont les variables indépendantes que nous avons trouvées pour ce cas. Quand cette condition n'a pas lieu, on forme aisément cinq équations simultanées aux différentielles partielles du premier ordre, entre les sept variables

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \alpha,\ \beta,$$

où α et β sont les deux indépendantes, en multipliant les équations du premier système par $\frac{dx}{d\beta\,(\alpha}$, et celles du second par $\frac{dx}{d\alpha\,(\beta}$. Ces cinq équations sont :

$$H\frac{dy}{d\beta\,(\alpha} - (K+\sqrt{G})\frac{dx}{d\beta\,(\alpha} = 0,$$

$$H\frac{dy}{d\alpha\,(\beta} - (K-\sqrt{G})\frac{dx}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

$$H\frac{dp}{d\beta\,(\alpha} + (K-\sqrt{G})\frac{dq}{d\beta\,(\alpha} + M\frac{dx}{d\beta\,(\alpha} = 0,$$

$$H\frac{dp}{d\alpha\,(\beta} + (K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha\,(\beta} + M\frac{dx}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

ou

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

Lorsque $K^2 - HL$ n'est pas nul, et qu'il n'y a qu'un des deux systèmes où l'on puisse former une combinaison intégrable, on ne peut, par la même méthode, faire évanouir qu'une des dérivées extrêmes, et l'équation qui donne la valeur de la fonction dont nous venons de parler est de la forme

$$s + tF(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q).$$

Cette équation présente plus de difficultés que les deux précédentes; mais elle ne laisse pas, dans beaucoup de cas, de conduire à une équation primitive en intégrales définies, qu'on peut également développer pour reconnaître si elle est susceptible de se transformer en une intégrale sous forme finie où il n'y ait que des intégrales indéfinies.

Lorsque K, H, L sont des fonctions de p et de q seulement, et que $M = 0$, les deux équations

$$H\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K - \sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0,$$

et

$$H\frac{dp}{dx\,(\beta} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\beta} + M = 0,$$

appartenant la première à un système, et la seconde à l'autre, s'intègrent immédiatement, parce qu'elles ne contiennent alors que p, q, dp et dq: elles donnent, par conséquent, les deux quantités α et β, qu'il faut prendre pour variables indépendantes en fonctions de p et de q. Ces valeurs sont précisément celles qu'on obtient, en faisant évanouir les deux dérivées extrêmes du second ordre dans l'équation

linéaire qu'on trouve en transformant l'équation par la méthode de M. Legendre; la fonction qui en dépend par une simple équation de second ordre, est alors la valeur de $px + qy - z$, ainsi que l'a fait voir ce célèbre mathématicien : mais on n'a eu jusqu'à présent aucun moyen de déterminer cette fonction dès que M n'est pas nul, ou que x ou y entrent avec p et q dans les coefficiens des dérivées du second ordre.

La première question à résoudre pour atteindre ce but consiste à déterminer, lorsqu'on peut tirer d'un des deux systèmes une combinaison intégrable, une fonction telle que la valeur en soit donnée par une seule équation du second ordre entre cette fonction et deux nouvelles variables indépendantes, dans laquelle il n'y ait que deux dérivées du second ordre, l'intermédiaire et une des deux extrêmes : je ferai voir ensuite que, dans le cas où $K^2 - HL = 0$, la dérivée intermédiaire s disparaît nécessairement dans cette transformation, et que l'équation qui en résulte se trouve ainsi immédiatement sous la forme

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

tandis qu'elle se présente sous celle-ci,

$$s + tF(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q),$$

quand cette condition n'a pas lieu. La solution générale de cette question sera le premier objet des recherches contenues dans ce paragraphe; je donnerai ensuite le procédé qu'il faut suivre, lorsque $K^2 - HL$ n'est pas nul, et qu'il reste par conséquent deux dérivées du second ordre dans la première transformée, pour ramener par une seconde transformation l'intégration de l'équation donnée à celle d'une équation de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

où il n'y en ait plus qu'une ; et je terminerai ces recherches par

l'examen des cas où la solution générale doit être modifiée suivant les diverses circonstances que présentent les équations qu'on obtient en intégrant celles dont se composent les systèmes de trois équations déduits de la proposée.

Démontrons d'abord que si l'on forme avec l'un de ces systèmes de trois équations, une combinaison intégrable, et qu'après l'avoir intégrée comme une équation aux différentielles ordinaires, et y avoir ajouté une constante arbitraire α, on intègre de nouveau cette équation, qui est aux différentielles partielles du premier ordre, par la méthode connue pour les équations de cette sorte, l'intégrale qui en résultera satisfera à la proposée dont elle sera, comme nous le verrons bientôt, une intégrale particulière contenant une constante et une fonction arbitraire ; nous examinerons ensuite comment on peut continuer d'y satisfaire, en faisant varier α de manière à convertir cette intégrale particulière en intégrale générale.

La combinaison intégrable que nous considérons, déduite de trois équations où les dérivées ne sont qu'à la première puissance, résulte nécessairement de la somme de trois produits formés chacun d'une de ces équations multipliées par un facteur convenable. En nommant λ, μ, ν, ces trois facteurs, qui sont des fonctions de x, y, z, p, q, la combinaison sera représentée par

$$\lambda\left(H\frac{dy}{dx\,(\alpha} - K - \sqrt{G}\right) + \mu\left(H\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M\right) + \nu\left(\frac{dz}{dx\,(\alpha} - p - q\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right);$$

en sorte que si nous désignons par u la valeur de la constante arbitraire α de son intégrale en fonctions des mêmes quantités, cette combinaison sera identique à

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx\,(\alpha} + \left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \left(\frac{du}{dq}\right)\frac{dq}{dx\,(\alpha},$$

et

et on aura:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=-\lambda(K+\sqrt{G})+\mu M-\nu p,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\lambda H-\nu q,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)=\nu,$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right)=\mu H,$$

$$\left(\frac{du}{dq}\right)=\mu(K-\sqrt{G}).$$

La possibilité de satisfaire à-la fois à ces cinq équations par des valeurs convenables de λ, μ, ν, est la condition nécessaire pour que le système des trois équations

$$H\frac{dy}{dx(\alpha}-K-\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha}+M=0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha}-p-q\frac{dy}{dx(\alpha}=0,$$

puisse donner une combinaison intégrable; cette condition est donc remplie dans le cas dont nous nous occupons, et il est inutile, pour le but que nous nous proposons, de chercher à quels signes on pourrait, d'après l'équation donnée, reconnaître dans quel cas elle a lieu; contentons-nous de tirer de ces cinq équations la démonstration dont nous avons besoin.

En considérant α comme une constante dans l'équation du premier ordre

$$u=\alpha,$$

on en trouvera l'intégrale par la méthode expliquée dans le premier paragraphe de ce Mémoire, en la différenciant par rapport à y, x étant

l'autre variable indépendante, et en introduisant dans l'équation résultant de cette différenciation une nouvelle variable indépendante γ, au moyen des formules qui donnent les valeurs de s et de t en fonctions des dérivées de y et de q, lorsqu'en supposant α constant, on prend x et γ pour les deux variables indépendantes. Afin d'exprimer que α ne varie pas dans ces dérivées, je les représenterai par

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},\quad \frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x},\quad \frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma},\quad \frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}:$$

alors ces valeurs seront

$$s=\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}-\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}\,\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}\quad t=\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}};$$

il faudra les substituer dans la dérivée de $u=\alpha$ prise comme nous venons de le dire, et égaler séparément à zéro, après cette substitution, les termes qui seront multipliés par $\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}$, et ceux qui ne contiendront pas ce facteur ; on aura ainsi les deux équations

$$\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}-\left(\frac{du}{dq}\right)=0,$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)q+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}=0,$$

qui, jointes à

$$u=\alpha,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma}-p-q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}=0,$$

et

$$\frac{dz}{d\gamma\,(\alpha,x}=q\,\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x},$$

donneront toutes les relations nécessaires pour parvenir à l'intégrale cherchée sous la forme

$$V = o,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = o,$$

ainsi qu'on l'a vu dans le premier paragraphe de ce Mémoire, en représentant par $\left[\frac{dV}{d\gamma}\right]$ la fonction dérivée de V, lorsqu'on n'y fait varier que γ et $\varphi\gamma$, α étant toujours constant.

En vertu de la seconde de ces deux équations, les dérivées de la première, $V = o$, ne contiendront point de termes provenant de la variabilité de γ, et les valeurs de p et de q tirées de ces dérivées, rendront identique l'équation

$$u = \alpha.$$

Si l'on suppose actuellement α variable dans $V = o$, qu'on y écrive u au lieu de $\varphi\gamma$, u étant une fonction de α et de γ, et qu'on joigne à cette équation ces deux-ci :

$$\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right] = o,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right] = o,$$

en donnant aux parenthèses carrées la signification que nous leur avons attribuée jusqu'ici, il est clair que les deux différentielles de l'équation $V = o$, seront encore les mêmes, et donneront les mêmes valeurs de p et de q, excepté que u y sera écrit à la place de $\varphi\gamma$; en sorte que ces valeurs satisferont toujours à

$$u = \alpha,$$

puisqu'elles rendaient cette équation identique indépendamment de la valeur de $\varphi\gamma$, lorsque α était considéré comme une constante ; on aura donc toujours $u = \alpha$, et il ne restera plus qu'à faire en sorte que cette

équation, qui satisfait à la proposée

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

quand α est constant, y satisfasse encore quand α sera considéré comme une quantité variable, en joignant, pour exprimer cette condition, une quatrième équation aux trois que nous avons déjà obtenues comme devant faire partie de l'intégrale.

Pour cela, voyons d'abord comment $u = \alpha$ satisfait à l'équation proposée quand α est constant. On en tire alors, à cause que u ne contient que x, y, z, p, q,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)p + \left(\frac{du}{dp}\right)r + \left(\frac{du}{dq}\right)s = 0,$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)q + \left(\frac{du}{dp}\right)s + \left(\frac{du}{dq}\right)t = 0;$$

c'est-à-dire, en y écrivant au lieu de

$$\left(\frac{du}{dx}\right),\ \left(\frac{du}{dy}\right),\ \left(\frac{du}{dz}\right),\ \left(\frac{du}{dp}\right),\ \left(\frac{du}{dq}\right),$$

leurs valeurs trouvées ci-dessus, et en divisant par μ les équations résultant de cette substitution,

$$-\frac{\lambda}{\mu}(K + \sqrt{G}) + M + Hr + (K - \sqrt{G})s = 0,$$

et

$$\frac{\lambda}{\mu}H + Hs + (K - \sqrt{G})t = 0,$$

qui donnent, en tirant de la seconde équation la valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ et la substituant dans la première, et en faisant attention qu'à cause de $G = K^2 - HL$, on a $\frac{K^2 - G}{H} = L$, l'équation même proposée

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0.$$

Si α est variable, on aura, au lieu des deux équations que nous venons d'obtenir, celles-ci

$$-\frac{\lambda}{\mu}(K+\sqrt{G})+M+Hr+(K-\sqrt{G})s=\frac{1}{\mu}\,\frac{d\alpha}{dx\,(y},$$

et

$$\frac{\lambda}{\mu}H+Hs+(K-\sqrt{G})t=\frac{1}{\mu}\,\frac{d\alpha}{dy\,(x},$$

d'où l'on tire, en éliminant $\frac{\lambda}{\mu}$ de la même manière,

$$Hr+2Ks+Lt+M=\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\alpha}{dx\,(y}+\frac{K+\sqrt{G}}{H}\,\frac{d\alpha}{dy\,(x}\right),$$

et comme $\frac{d\alpha}{dx\,(y}$ est égal à $-\frac{d\alpha}{dy\,(x}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, cette équation pourra s'écrire ainsi :

$$Hr+2Ks+Lt+M=-\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{d\alpha}{dy\,(x}\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}-\frac{K+\sqrt{G}}{H}\right),$$

d'où il suit que l'équation proposée

$$Hr+2Ks+Lt+M=0$$

sera satisfaite, si l'on joint aux trois équations

$$V=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right]=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right]=0,$$

celle-ci

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}=\frac{K+\sqrt{G}}{H}.$$

On tire immédiatement des trois premières,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)p=0;$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)q=0,$$

ce qui fait cinq équations déterminant z, x, y, p, q, en fonctions de

$$\alpha,\ \gamma,\ \pi,\ \frac{d\pi}{d\gamma(\alpha},\ \frac{d\pi}{d\alpha(\gamma},$$

qui serviront à les éliminer de $H, K, \sqrt{G}$; et il ne s'agira plus que d'avoir la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ en fonction de α, γ, π, et des dérivées de π, pour que la quatrième équation de l'intégrale ne contienne aussi que ces quantités, et puisse servir à déterminer, en l'intégrant, la valeur de π en fonction de α et de γ, afin qu'en écrivant cette valeur au lieu de π dans les trois premières des quatre équations que nous venons d'obtenir, elles représentent alors à elles seules l'intégrale cherchée sous la forme d'un système de trois équations.

Le problème que nous nous sommes proposé ne se trouvera résolu par cette méthode, qu'autant que l'équation trouvée de cette manière pour déterminer π, ne contiendra au plus que deux des dérivées du second ordre de π, et que ces dérivées n'y entreront qu'à la première puissance; sans quoi, cette équation étant aussi compliquée ou même plus compliquée que la proposée, l'intégration ne serait pas ramenée à celle d'une équation plus simple. Pour trouver la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, je remarque d'abord que si l'on représente, conformément à la notation dont nous avons fait usage jusqu'à présent, par

$$\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right],\ \left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right],\ \left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right],\ \left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right],$$

les dérivées partielles des valeurs de p et de q qui résultent de nos deux dernières équations, savoir :

$$p=-\frac{\left(\frac{dV}{dx}\right)}{\left(\frac{dV}{dz}\right)}\ \text{et}\ q=-\frac{\left(\frac{dV}{dy}\right)}{\left(\frac{dV}{dz}\right)},$$

prises en ne faisant varier dans ces valeurs que α, γ et π considéré

comme une fonction de α et de γ, on aura, d'après cette convention, pour déterminer la valeur de $\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]$, l'équation identique

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]=-\left[\frac{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}{d\gamma(\alpha}\right]-p\,\frac{d\left(\frac{dV}{dz}\right)}{d\gamma(\alpha},$$

ou

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]=-\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dx}\right)-p\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dz}\right);$$

parce que l'on peut changer l'ordre de deux différenciations partielles faites dans deux systèmes différens de variabilité sans changer la valeur des dérivées qui en résultent ; on trouvera de même, pour déterminer les valeurs des trois autres quantités,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right]=-\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dx}\right)-p\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right]=-\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dy}\right)-q\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right]=-\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dy}\right)-q\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dz}\right).$$

En écrivant les premiers membres de ces quatre équations à la place des seconds, dans les dérivées prises par rapport à γ en y regardant α et γ comme les variables indépendantes, des deux équations

$$\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]=0,$$

qui font partie de l'intégrale, on mettra ces dérivées sous une forme plus simple ; et comme on n'aura pas fait varier α dans la différencia-

tion qui aura donné ces dérivées, il sera facile d'en déduire la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$.

On trouve, en faisant cette opération et en transposant,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]\frac{dx}{d\gamma(\alpha}+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right]\frac{dy}{d\gamma(\alpha}=\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2(\alpha}\right],$$

et

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right]\frac{dx}{d\alpha(\gamma}+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right]\frac{dy}{d\alpha(\gamma}=\left[\frac{d^2V}{d\alpha\, d\gamma}\right],$$

Résolvant ces deux équations par rapport à $\frac{dx}{d\gamma(\alpha}$ et $\frac{dy}{d\gamma(\alpha}$, et divisant la seconde valeur par la première pour avoir celle de $\frac{\frac{dy}{d\gamma(\alpha}}{\frac{dx}{d\gamma(\alpha}}$ qui est la même chose que $\frac{dy}{dx(\alpha}$, on trouvera

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=-\frac{\left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right]\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2(\alpha}\right]-\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]\left[\frac{d^2V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}{\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right]\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2(\alpha}\right]-\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right]\left[\frac{d^2V}{d\alpha\, d\gamma}\right]},$$

en supprimant, au numérateur et au dénominateur, le facteur $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, et comme cette valeur doit être égale à $\frac{K+\sqrt{G}}{H}$, on aura enfin pour la quatrième équation de l'intégrale dont nous avons déjà trouvé les trois premières équations,

$$\left\{H\left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right]\right\}\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2(\alpha}\right]-$$
$$\left\{H\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right]\right\}\left[\frac{d^2V}{d\alpha\, d\gamma}\right]=0.$$

Cette équation contenant des dérivées du second ordre de n relativement aux deux variables indépendantes α et γ, il faut, pour que l'intégration de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à une question plus

plus simple, qu'il n'y ait dans cette équation que deux des dérivées du second ordre de n, et que ces dérivées n'y entrent qu'au premier degré: or, c'est ce qui est bien évident; car, d'après la manière dont on a obtenu les trois premières équations de l'intégrale,

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right] = 0,$$

les valeurs de x, y, z, qu'on doit en tirer pour les substituer dans la quatrième, ne contiendront que

$$\alpha, \; \gamma, \; n, \; \frac{dn}{d\alpha(\gamma} \text{ et } \frac{dn}{d\gamma(\alpha};$$

les valeurs de p et de q déduites des deux dérivées de la première de ces trois équations, prises en considérant x et y comme les deux variables indépendantes, et simplifiées en vertu des deux dernières, ne contiendront que

$$x, \; y, \; z, \; \alpha, \; \gamma \text{ et } n;$$

les dérivées de p et de q par rapport à α et à γ qui entrent dans la quatrième équation de l'intégrale, devant être prises, ainsi que l'indiquent les parenthèses carrées, sur ces valeurs, avant d'en éliminer x, y, z, et en y faisant varier seulement les deux quantités α et γ comme indépendantes, et n comme une fonction de α et de γ, il n'y aura dans ces dérivées que

$$x, \; y, \; z, \; \alpha, \; \gamma, \; n, \; \frac{dn}{d\alpha(\gamma} \text{ et } \frac{dn}{d\gamma(\alpha};$$

d'où il suit qu'après qu'on en aura éliminé x, y, z, il n'y restera que les mêmes quantités qui entrent dans les valeurs de ces dernières variables. Les dérivées du second ordre de n ne se rencontreront donc dans la quatrième équation de l'intégrale qu'autant qu'elles seront comprises dans les quantités

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2 (\alpha}\right] \text{ et } \left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right],$$

qui ne se trouvent qu'au premier degré dans cette quatrième équation; et comme on doit calculer les valeurs de

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2 (\alpha}\right] \text{ et de } \left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right],$$

par le même procédé que lorsqu'il s'agit de déterminer celles des dérivées de p et de q renfermées aussi entre des parenthèses carrées, c'est-à-dire, en faisant varier de la même manière α, γ et n dans la valeur de V, avant d'en éliminer x, y, z, il est évident qu'après cette élimination, la quatrième équation de l'intégrale, ainsi transformée, ne contiendra que les cinq quantités α, γ, n, $\frac{dn}{d\alpha(\gamma}$, $\frac{dn}{d\gamma(\alpha}$, et deux dérivées du second ordre de n, savoir :

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha} \text{ et } \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma},$$

ainsi que nous nous étions proposé de le démontrer.

La quatrième équation de l'intégrale que nous venons d'obtenir peut être mise sous une forme plus simple dans le cas où l'on peut obtenir une combinaison intégrale, non-seulement avec le système de trois équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, et où x et α sont pris pour les deux variables indépendantes, mais aussi avec l'autre système, où c'est x et β qui sont considérés comme les deux variables indépendantes; il est d'autant plus intéressant de nous occuper de cette transformation, que nous en déduirons dans la suite de ce Mémoire plusieurs conséquences importantes.

En désignant par v l'intégrale de cette combinaison, en sorte que l'équation

$$v = \beta$$

soit à l'égard du second système ce que l'équation

$$u = \alpha$$

est à l'égard du premier, il est aisé de voir que si l'on représente par

λ', μ', ν', les facteurs des équations du second système correspondans aux facteurs λ, μ, ν, des équations du premier, on aura

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = -\lambda'(K - \sqrt{G}) + \mu' M - \nu' p,$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \lambda' H - \nu' q,$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \nu',$$

$$\left(\frac{dv}{dp}\right) = \mu' H,$$

$$\left(\frac{dv}{dq}\right) = \mu'(K + \sqrt{G}).$$

Supposons maintenant qu'on substitue dans v, qui ne contient que x, y, z, p et q, à la place de p et de q, leurs valeurs tirées des trois premières équations de l'intégrale, en les calculant comme nous avons dit qu'il fallait le faire lorsque nous avions à éliminer leurs dérivées partielles de la quatrième équation de l'intégrale, et représentons par W ce que devient v en vertu de cette substitution : comme α, γ et η n'entreront dans W qu'en tant que p et q se trouvaient dans v, il est évident, en donnant toujours le même sens aux parenthèses carrées, qu'on aura

$$\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right] = \left(\frac{dv}{dp}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + \left(\frac{dv}{dq}\right)\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right] =$$
$$\mu'\left\{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\right\},$$

et

$$\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right] = \left(\frac{dv}{dp}\right)\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + \left(\frac{dv}{dq}\right)\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right] =$$
$$\mu'\left\{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\right\}.$$

C'est en écrivant les premiers membres de ces deux équations à la place des derniers dans la quatrième équation de l'intégrale, après qu'elle

aura été multipliée par μ', qu'on la mettra sous la forme dont nous venons de parler, savoir :

$$\left[\frac{d\,W}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]\left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\alpha}\right]-\left[\frac{d\,W}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right]=0.$$

Si, au lieu de substituer dans la valeur v de β, à la place de p et de q, leurs valeurs tirées des trois premières équations de l'intégrale, on les substituait dans celle de α, que nous avons représentée par u, et qu'on nommât w le résultat de cette substitution, comme α, γ et n n'entreraient aussi dans w qu'en tant que u contient p et q, on aurait de même

$$\left[\frac{d\,w}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]=\left(\frac{d\,u}{d\,p}\right)\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]+\left(\frac{d\,u}{d\,q}\right)\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]=$$
$$\mu\left\{H\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]+(K-\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]\right\},$$

et

$$\left[\frac{d\,w}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]=\left(\frac{d\,u}{d\,p}\right)\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]+\left(\frac{d\,u}{d\,q}\right)\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]=$$
$$\mu\left\{H\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]+(K-\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]\right\};$$

d'où l'on tire

$$H\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]=\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\,w}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]+2\sqrt{G}\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\alpha}\right],$$

et

$$H\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]=\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\,w}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]+2\sqrt{G}\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\gamma}\right].$$

Il est aisé de voir qu'on simplifiera beaucoup ces expressions, en faisant attention que l'équation $u=\alpha$, ou $u-\alpha=0$, résultant de l'équation

$$V=0,$$

lorsqu'on en élimine α, γ et n au moyen des deux équations

$$\left(\frac{d\,V}{d\,z}\right)p+\left(\frac{d\,V}{d\,x}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) q + \left(\frac{dV}{dy}\right) = 0 ;$$

il s'ensuit que quand on remet les valeurs de p et de q tirées de ces deux dernières équations dans

$$\pi - \alpha = 0 ,$$

ce qui, d'après la signification que nous venons de donner à la lettre w, change cette équation en

$$w - \alpha = 0 ,$$

on trouve nécessairement une relation entre les variables qu'elle contient équivalente à

$$V = 0 ;$$

en sorte qu'elle ne peut différer de celle-ci que par un facteur commun à tous ses termes, et que si l'on nomme ce facteur ω, on aura identiquement

$$w - \alpha = \omega V ,$$

$$\left[\frac{dw}{d\gamma\,(\alpha}\right] = V\left[\frac{d\omega}{d\gamma\,(\alpha}\right] + \omega\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right],$$

et

$$\left[\frac{dw}{d\alpha\,(\gamma}\right] - 1 = V\left[\frac{d\omega}{d\alpha\,(\gamma}\right] + \omega\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right];$$

d'où l'on conclut, en vertu des trois premières équations de l'intégrale,

$$V = 0 ,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0 ,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0 ,$$

que

$$\left[\frac{dw}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0 ;$$

et que

$$\left[\frac{dw}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 1 :$$

on aura donc

$$H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]=2\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right],$$

et

$$H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]=-\frac{1}{\mu}+2\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right].$$

En substituant ces valeurs dans la quatrième équation de l'intégrale, et multipliant par μ, on obtient

$$\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]+2\mu\sqrt{G}\left\{\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]-\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]\right\}=0.$$

Cette dernière forme est moins symétrique que celles sous lesquelles nous avons déjà mis cette quatrième équation ; mais elle a, comme la première, l'avantage de ne pas exiger que l'on puisse avoir la valeur de β ; et elle est ordinairement plus promptement calculée, parce qu'on n'a pas besoin, lorsqu'on en fait usage, de tirer celle de p des trois premières équations de l'intégrale.

Lorsque $G=0$, et qu'il n'y a par conséquent qu'un seul système d'équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, l'équation que nous venons de trouver se réduit à

$$\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]=0\,;$$

en sorte que l'intégrale est alors représentée par ce système de quatre équations ;

$$V=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right]=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right]=0,$$

$$\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]=0.$$

Il est aisé de voir directement que, dans le cas dont nous parlons, ces quatre équations satisfont, en effet, à la proposée ; car nous avons vu qu'elle était toujours satisfaite par les trois premières, quand on avait en outre

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}=\frac{K+\sqrt{G}}{H}\,;$$

et nous savons d'ailleurs qu'en considérant α comme une constante dans l'équation $u=\alpha$, son intégrale est représentée par ces deux-ci :

$$V=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma}\right]=0,$$

qui satisfont à un système d'équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parmi lesquelles se trouve

$$\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma}-\left(\frac{du}{dq}\right)=0,$$

et qu'elles donnent, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma}=\frac{\left(\frac{du}{dq}\right)}{\left(\frac{du}{dp}\right)}=\frac{K-\sqrt{G}}{H}.$$

Les deux premières équations de l'intégrale générale ne différant de celles dont se compose l'intégrale de

$$u=\alpha,$$

quand α est considéré comme une constante, qu'en ce que n s'y trouve écrit au lieu de $\phi\gamma$; il est clair que la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma}$ (*), tirée de ces deux premières équations, sera toujours la même, et par conséquent égale à $\frac{K-\sqrt{G}}{H}$, tandis que $\frac{dy}{dx\gamma\alpha}$ doit être égal à $\frac{K+\sqrt{G}}{H}$; mais quand $G=0$, ces deux valeurs deviennent égales entre elles, puisqu'elles le sont toutes deux à $\frac{K}{H}$; d'où il suit que dans ce cas il suffit, pour que l'intégrale satisfasse à la proposée, qu'outre les trois équations

$$V=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]=0,$$

(*) L'invariabilité de α et γ dans la différenciation par laquelle on calculerait cette dérivée, entraîne celle de n, qui est une fonction de α et γ, sans qu'il soit nécessaire de l'indiquer en écrivant n à la suite de α et de γ.

les valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ et de $\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}$ tirées des deux premières soient égales entre elles : or, c'est ce qui a lieu si leurs dérivées partielles, prises en n'y faisant varier que γ, et n en tant qu'il contient γ, sont nulles; celle de la première l'est déjà en vertu de la seconde; il ne s'agira donc plus que d'exprimer que celle de la seconde l'est aussi, en joignant à ces trois équations celle-ci :

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right] = 0.$$

On voit que, dans ce cas, la quatrième équation de l'intégrale ne contiendra qu'une seule dérivée de n qui soit du second ordre, savoir, $\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha}$, et que cette dérivée n'y entrera qu'au premier degré, puisque, d'après la signification que nous avons donnée aux parenthèses carrées, on a

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right] = \left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} + \left(\frac{d^2 V}{dn^2}\right)\left(\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2 V}{d\gamma\, dn}\right)\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} + \left(\frac{d^2 V}{d\gamma^2}\right):$$

il sera donc facile de voir si cette équation est susceptible d'être intégrée par les méthodes connues, et, dans ce cas, d'en tirer la valeur de n, qu'il ne s'agira plus que de substituer dans les trois premières équations de l'intégrale pour avoir celle-ci sous la forme d'un système de trois équations.

Donnons d'abord quelques exemples d'équations du second ordre dans lesquelles la quantité G ou $K^2 - HL$ est nulle, et dont l'intégrale générale puisse facilement s'obtenir par cette méthode. Soit d'abord l'équation

$$x^4 r - 4x^2 qs + 4q^2 t + 2px^3 = 0;$$

on aura

$$H = x^4,\ K = -2x^2 q,\ L = 4q^2,\ M = 2px^3,\ G = 0,$$

et par conséquent,

$$x^2 \frac{dy}{dx(\alpha} + 2q = 0,$$

et

$$x^2 \frac{dp}{dx(\alpha} - 2q \frac{dq}{dx(\alpha} + 2px = 0,$$

dont la seconde est une différentielle exacte, et donne

$$x^2 p - q^2 = 2\alpha,$$

où j'ai pris 2α au lieu de α pour éviter les fractions, cette équation s'intégrera ainsi, en y considérant α comme une constante :

$$x^2 s - 2qt = 0,$$

$$x^2 \frac{dq}{dx(\alpha, \gamma} = 0,$$

$$x^2 \frac{dy}{dx(\alpha, \gamma} + 2q = 0;$$

d'où il est aisé de conclure

$$q = \gamma, \quad \frac{dy}{dx(\alpha, \gamma} = -\frac{2\gamma}{x^2}, \quad p = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2},$$

$$y = \frac{2\gamma}{x} - \phi'\gamma, \quad dz = \gamma dy + \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2} dx,$$

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \phi\gamma.$$

La valeur de y étant celle qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle partielle de l'équation qui donne la valeur de z, ces équations n'ont pas besoin d'être transformées, et l'intégrale générale de la proposée sera représentée par les trois équations

[illegible] $2\alpha + \gamma^2$ [illegible] $+$ [illegible],

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$-\frac{2}{x} + \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourvu qu'on détermine n de manière qu'on ait en même temps dérivée partielle relative à γ seul de la seconde équation, égale zéro, on trouve pour cette dérivée

$$-\frac{2}{x} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = 0,$$

et en éliminant x,

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma},$$

d'où

$$n = \int e^{-u^2} du\,\varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}), \quad \left[u = -\frac{1}{0},\ u = \frac{1}{0}\right]$$

$$\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = \int e^{-u^2} du\,\varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-u^2} u\,du\,\varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) = \int e^{-u^2} du\,\varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha});$$

en sorte que l'intégrale est exprimée par ces trois équations,

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \int e^{-u^2} du\,\varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \int e^{-u^2} du\,\varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$-\frac{2}{x} + \int e^{-u^2} du\,\varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

qui se vérifient très-facilement, puisqu'on en tire

On trouve, en ajoutant ces deux équations,

$$(x+q)\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \frac{dp}{dx\,(\alpha}\right) + (y+p)\left(1 + \frac{dq}{dx\,(\alpha}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(x+q)\ (y+p) = \alpha;$$

en l'intégrant de nouveau, comme une équation aux différentielles du premier ordre, on obtient successivement

$$(x+q)\,s + x + q + (y+p)\,t = 0,$$

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha, \gamma} + 1 = 0,$$

$$(x+q)\,\frac{dy}{dx\,(\alpha, \gamma} = y + p;$$

on a donc

$$q + x = \gamma,$$

$$y + p = \frac{\alpha}{\gamma},$$

$$q = \gamma - x,$$

$$p = \frac{\alpha}{\gamma} - y,$$

$$z = \gamma y + \frac{\alpha x}{\gamma} - xy - \pi,$$

$$y - \frac{\alpha x}{\gamma^2} - \frac{d\pi}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$\frac{x}{\gamma} - \frac{d\pi}{d\alpha\,(\gamma} = 0;$$

$$\frac{2\alpha x}{\gamma^3} - \frac{d^2\pi}{d\gamma^2\,(\alpha} = 0.$$

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} - q + x = 0,$$

$$q = \gamma, \quad p = \gamma x - \frac{\gamma^2}{2} - \alpha,$$

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + n,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$- x + \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

$$- x + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = 0,$$

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma},$$

$$n = \int e^{-u^2}\, du\, \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha});$$

en sorte que l'intégrale de

$$r + 2(q - x)s + (q - x)^2 t - q = 0,$$

est

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \int e^{-u^2}\, du\, \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \int e^{-u^2}\, du\, \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

$$x - \int e^{-u^2}\, du\, \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

Soit encore l'équation

$$(x+q)^2 r + 2(x+q)(y+p)s + (y+p)^2 t + 2(x+q)(y+p) = 0,$$

on aura

$$(x + q)\frac{dy}{dx\,(\alpha} - y - p = 0,$$

$$(x + q)\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (y + p)\frac{dq}{dx\,(\alpha} + 2(y + p) = 0.$$

On trouve, en ajoutant ces deux équations,

$$(x+q)\left(\frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{dp}{dx(\alpha}\right) + (y+p)\left(1 + \frac{dq}{dx(\alpha}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(x+q)\ (y+p) = \alpha;$$

en l'intégrant de nouveau, comme une équation aux différentielles du premier ordre, on obtient successivement

$$(x+q)\,s + x + q + (y+p)\,t = 0,$$

$$\frac{dq}{dx(\alpha,\gamma} + 1 = 0,$$

$$(x+q)\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma} = y + p;$$

on a donc

$$q + x = \gamma,$$

$$y + p = \frac{\alpha}{\gamma},$$

$$q = \gamma - x,$$

$$p = \frac{\alpha}{\gamma} - y,$$

$$z = \gamma y + \frac{\alpha x}{\gamma} - xy - \eta,$$

$$y - \frac{\alpha x}{\gamma^2} - \frac{d\eta}{d\gamma(\alpha} = 0,$$

$$\frac{x}{\gamma} - \frac{d\eta}{d\alpha(\gamma} = 0,$$

$$\frac{2\alpha x}{\gamma^3} - \frac{d^2\eta}{d\gamma^2(\alpha} = 0.$$

$$\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2 (\alpha} = \frac{2\alpha}{\gamma^2} \left(\frac{d\gamma}{d\varepsilon (\alpha} \right)^2 \frac{d u}{d\alpha (\varepsilon}$$

$$+ \frac{\dfrac{d^2 \gamma}{d\varepsilon^2 (\alpha} - \dfrac{2\alpha}{\gamma^2} \left(\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon (\alpha} \right)^2 \dfrac{d\gamma}{d\alpha (\varepsilon}}{\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon (\alpha}} \frac{d u}{d\varepsilon (\alpha},$$

qui prendra la forme demandée, si, après avoir supposé $\frac{d\gamma}{d\varepsilon (\alpha} = \gamma$, ce qui réduit à une fonction de α le coefficient de $\frac{d u}{d\alpha (\varepsilon}$, on peut satisfaire à

$$\frac{d^2 \gamma}{d\varepsilon^2 (\alpha} - \frac{2\alpha}{\gamma^2} \left(\frac{d\gamma}{d\varepsilon (\alpha} \right)^2 \frac{d\gamma}{d\alpha (\varepsilon} = 0,$$

qui devient alors

$$\frac{d^2 \gamma}{d\varepsilon^2 (\alpha} - 2\alpha \frac{d\gamma}{d\alpha (\varepsilon} = 0.$$

En déterminant convenablement la fonction arbitraire de α qui se trouve dans la valeur de γ, tirée de l'équation

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon (\alpha} = \gamma,$$

savoir :

$$\gamma = e^{\varepsilon} \upsilon \alpha;$$

on a

$$e^{\varepsilon} \upsilon \alpha - 2\alpha e^{\varepsilon} \upsilon' \alpha = 0, \quad \frac{\upsilon' \alpha}{\upsilon \alpha} = \frac{1}{2\alpha},$$

et par conséquent

$$\upsilon \alpha = \sqrt{\alpha};$$

ainsi,

$$\gamma = e^{\varepsilon} \sqrt{\alpha}:$$

et

on a d'ailleurs

$$\frac{d^2 n}{d \varepsilon^2 (\alpha} = 2\alpha \frac{d n}{d \alpha (\varepsilon} ;$$

cette équation donne pour la valeur de n

$$n = \int e^{-u^2} du\, \varphi \left(\varepsilon + 2u \sqrt{\tfrac{1}{2}\, l \alpha}\right) :$$

si l'on écrit, pour simplifier ces expressions, α^2 à la place de α, on aura

$$\gamma = \alpha e^{\varepsilon},$$

$$n = \int e^{-u^2} du\, \varphi\, (\varepsilon + 2u \sqrt{l \alpha}) ;$$

et l'intégrale générale cherchée sera représentée par le système des trois équations

$$z = \alpha e^{\varepsilon} y + \alpha e^{-\varepsilon} x - xy - \int e^{-u^2} du\, \varphi\, (\varepsilon + 2u \sqrt{l\alpha}),$$

$$\alpha e^{\varepsilon} y - \alpha e^{-\varepsilon} x - \int e^{-u^2} du\, \varphi'\, (\varepsilon + 2u \sqrt{l\alpha}) = 0,$$

$$\alpha e^{\varepsilon} y + \alpha e^{-\varepsilon} x - \int e^{-u^2} du\, \varphi''\, (\varepsilon + 2u \sqrt{l\alpha}) = 0,$$

dont la troisième est écrite comme on l'obtient en prenant la dérivée partielle de la seconde par rapport à ε seul, mais n'en est pas moins identique à la dérivée partielle de la première relative à α seul; car on trouve, en prenant cette dernière,

$$e^{\varepsilon} y + e^{-\varepsilon} x - \frac{1}{\alpha \sqrt{l\alpha}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi'\, (\varepsilon + 2u \sqrt{l\alpha}) = 0 ;$$

qui devient, en intégrant par parties,

$$e^{\varepsilon} y + e^{-\varepsilon} x - \frac{1}{\alpha} \int e^{-u^2} du\, \varphi''\, (\varepsilon + 2u \sqrt{l\alpha}) = 0 :$$

Pour vérifier l'intégrale que nous venons d'obtenir, il suffit de remarquer,

1.° Que les dérivées partielles de la première, relativement à α et ε, étant toutes deux nulles, on a

$$p = \alpha e^{-\varepsilon} - y, \quad q = \alpha e^{\varepsilon} - x,$$

et par conséquent

$$(x+q)(y+p)=\alpha^2, \quad \frac{y+p}{x+q}=e^{-2\varepsilon};$$

2.° Que la dérivée de la seconde, par rapport à ε, étant identique à celle de la première prise relativement à α, les termes où entreraient $\frac{d\varepsilon}{dx(\alpha}$ dans la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ qu'on tirerait de cette seconde équation, seraient nuls ; ce qui donne

$$\alpha e^{\varepsilon}\frac{dy}{dx(\alpha}-\alpha e^{-\varepsilon}=0,$$

ou

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=e^{-2\varepsilon}=\frac{y+p}{x+q};$$

ainsi,

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}=-\frac{y+p}{x+q};$$

et comme on tire de

$$(x+q)(y+p)=\alpha^2,$$

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}=\frac{(x+q)r+(y+p)s+y+p}{(x+q)s+(y+p)t+x+q},$$

on aura

$$\frac{(x+q)r+(y+p)s+y+p}{(x+q)s+(y+p)t+x+q}=-\frac{y+p}{x+q},$$

c'est-à-dire, l'équation donnée,

$$(x+q)^2r+2(x+q)(y+p)s+(y+p)^2t+2(x+q)(y+p)=0.$$

Dans ces divers exemples, lorsque l'intégrale a été réduite à un système de trois équations par la détermination de la valeur explicite de n en fonction de α et de γ, il est arrivé que la troisième équation, en même temps qu'elle était la dérivée partielle de la première par rapport

à α, était celle de la seconde relativement à γ, et par conséquent la dérivée partielle du second ordre de la première équation, aussi relativement à γ. Cette circonstance, que nous avions déjà remarquée dans l'intégrale de l'équation

$$r + 2qs + q^2 t = X,$$

vient de ce que G étant nul dans ces exemples, la valeur de n doit être telle qu'elle réduise à trois, quatre équations de la forme

$$V = 0, \quad \left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0, \quad \left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0, \quad \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right] = 0,$$

en faisant que les deux dernières deviennent identiques.

Avant de donner des exemples du cas où G, c'est-à-dire, $K^2 - HL$, n'est pas nul, nous ferons sur la quatrième équation de l'intégrale une remarque importante.

En considérant les diverses formes sous lesquelles nous avons successivement mis cette équation, on s'aperçoit aisément qu'il suffit, pour l'obtenir, d'égaler la quantité

$$\frac{\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}{\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2}\right]}$$

à l'une des trois suivantes,

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}, \quad \frac{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]},$$

$$\frac{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]},$$

qui sont identiquement égales entre elles. Ces quantités sont le rapport des dérivées partielles de W relativement à α et à γ, lorsqu'on regarde

comme des constantes les x, y, z, qui se trouvent dans cette quantité ; ces dérivées dépendent donc de la forme qu'on donne à la valeur de β par la substitution qui change cette valeur en W. Mais il est d'autres dérivées relativement à α et à γ, de la même quantité β, qui, d'après la notation adoptée dans ce Mémoire, doivent être représentées par $\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}$ et $\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}$, et qui restent toujours les mêmes, quelle que soit la forme qu'on donne à la valeur de β ; ce sont celles qu'on obtient en considérant que, lorsqu'on prend α et γ pour les deux variables indépendantes, toutes les quantités qui entrent dans le calcul en deviennent des fonctions, et qu'ainsi elles doivent toutes varier conformément aux relations qui les lient à ces deux-là. Dans cette hypothèse de différenciation, le rapport

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}},$$

de ces dérivées semble d'abord devoir être différent de celui des deux dérivées de W prises en y regardant x, y, z comme des constantes ; mais il n'en est pas ainsi, et ces deux rapports sont égaux en vertu des quatre équations dont se compose l'intégrale. Pour le démontrer, il faut remarquer qu'en vertu de l'équation $\beta = v$ et des valeurs de

$$\left(\frac{dv}{dx}\right), \quad \left(\frac{dv}{dy}\right), \quad \left(\frac{dv}{dz}\right), \quad \left(\frac{dv}{dp}\right), \quad \left(\frac{dv}{dq}\right),$$

trouvées ci-dessus, on a

$$\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma} = \left\{-\lambda'(K - \sqrt{G}) + \mu' M\right\} \frac{dx}{d\alpha(\gamma} + \lambda' H \frac{dy}{d\alpha(\gamma} + \mu' H \frac{dp}{d\alpha(\gamma} + \mu'(K + \sqrt{G}) \frac{dq}{d\alpha(\gamma},$$

et

$$\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha} = \left\{-\lambda'(K - \sqrt{G}) + \mu' M\right\} \frac{dx}{d\gamma(\alpha} + \lambda' H \frac{dy}{d\gamma(\alpha} + \mu' H \frac{dp}{d\gamma(\alpha} + \mu'(K + \sqrt{G}) \frac{dq}{d\gamma(\alpha}.$$

Mais, d'après la notation adoptée dans ce Mémoire,

$$\frac{d p}{d \alpha (\gamma} = \left[\frac{d p}{d \alpha (\gamma}\right] + \frac{d p}{d x (\alpha, \gamma} \; \frac{d x}{d \alpha (\gamma},$$

$$\frac{d q}{d \alpha (\gamma} = \left[\frac{d q}{d \alpha (\gamma}\right] + \frac{d q}{d x (\alpha, \gamma} \; \frac{d x}{d \alpha (\gamma},$$

$$\frac{d p}{d \gamma (\alpha} = \left[\frac{d p}{d \gamma (\alpha}\right] + \frac{d p}{d x (\alpha, \gamma} \; \frac{d q}{d \gamma (\alpha},$$

$$\frac{d q}{d \gamma (\alpha} = \left[\frac{d q}{d \gamma (\alpha}\right] + \frac{d q}{d x (\alpha, \gamma} \; \frac{d x}{d \gamma (\alpha};$$

les valeurs que nous venons de trouver pour $\frac{d \beta}{d x (y}$ et $\frac{d \beta}{d \alpha (\gamma}$, peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\frac{d \beta}{d \alpha (\gamma} = \lambda' \left\{ H \frac{d y}{d \alpha (\gamma} - (K - \sqrt{G}) \frac{d x}{d \alpha (\gamma} \right\} +$$
$$\mu' \left\{ H \left[\frac{d p}{d \alpha (\gamma}\right] + (K + \sqrt{G}) \left[\frac{d q}{d \alpha (\gamma}\right] \right\} +$$
$$\mu' \left\{ H \frac{d p}{d x (\alpha, \gamma} + (K + \sqrt{G}) \frac{d q}{d x (\alpha, \gamma} + M \right\} \frac{d x}{d \alpha (\gamma},$$

et

$$\frac{d \beta}{d \gamma (\alpha} = \lambda' \left\{ H \frac{d y}{d \gamma (\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{d x}{d \gamma (\alpha} \right\} +$$
$$\mu' \left\{ H \left[\frac{d p}{d \gamma (\alpha}\right] + (K + \sqrt{G}) \left[\frac{d q}{d \gamma (\alpha}\right] \right\} +$$
$$\mu' \left\{ H \frac{d p}{d x (\alpha, \gamma} + (K + \sqrt{G}) \frac{d q}{d x (\alpha, \gamma} + M \right\} \frac{d x}{d \gamma (\alpha}.$$

Rappelons-nous maintenant que, d'après la théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre, et le procédé même par lequel nous avons trouvé les trois premières équations de l'intégrale, si l'on considère α, γ, et par conséquent aussi la quantité que nous avons représentée par n, comme des constantes, les valeurs de p et de q tirées de ces trois équations, satisfont à l'équation du premier ordre

$$u = \alpha,$$

en rendant nulles les deux quantités

$$\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}-\left(\frac{du}{dq}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)q+\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

qu'on obtient en décomposant, comme nous l'avons déjà vu, la dérivée de $u=\alpha$ par rapport à y, après y avoir remplacé s par sa valeur

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}-\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}\;\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

et que si l'on avait pris la dérivée de $u=\alpha$ relativement à x, et qu'on y eût mis à la place de r sa valeur

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}-s\,\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

les termes multipliés par s étant nuls, on aurait eu cette troisième quantité

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)p+\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

nulle en vertu des mêmes valeurs de p et de q; nous en conclurons, en égalant à zéro les deux dernières de ces trois quantités, après y avoir remplacé

$$\left(\frac{du}{dx}\right),\ \left(\frac{du}{dy}\right),\ \left(\frac{du}{dz}\right),\ \left(\frac{du}{dp}\right),$$

par leurs valeurs trouvées ci-dessus, et avoir divisé tous les termes de la première par H, ces deux équations

$$\lambda+\mu\,\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}=0,$$

et $$-\lambda\,(K+\sqrt{G})+\mu M+\mu H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}=0;$$

d'où $$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}+(K+\sqrt{G})\,\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}+M=0;$$

ce qui réduit le rapport des deux dérivées de β, à

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}=\frac{\frac{\lambda'}{\mu'}\left\{H\,\frac{dy}{d\alpha\,(\gamma}-(K-\sqrt{G})\,\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma}\right\}+H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\frac{\lambda'}{\mu'}\left\{H\,\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha}-(K-\sqrt{G})\,\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}\right\}+H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}.$$

Mais parmi les équations du second système d'équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, se trouve celle-ci :

$$H \frac{dy}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0;$$

en la multipliant alternativement par $\frac{dx}{d\alpha(\beta}$ et par $\frac{dx}{d\gamma(\beta}$, on trouve les deux suivantes :

$$H \frac{dy}{d\alpha(\beta} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0,$$

$$H \frac{dy}{d\gamma(\beta} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\gamma(\beta} = 0:$$

mais on a identiquement

$$\frac{dy}{d\alpha(\gamma} = \frac{dy}{d\alpha(\beta} + \frac{dy}{d\beta(\alpha} \frac{d\beta}{d\alpha(\gamma},$$

$$\frac{dx}{d\alpha(\gamma} = \frac{dx}{d\alpha(\beta} + \frac{dx}{d\beta(\alpha} \frac{d\beta}{d\alpha(\gamma},$$

$$\frac{dy}{d\gamma(\alpha} = \frac{dy}{d\gamma(\beta} + \frac{dy}{d\beta(\gamma} \frac{d\beta}{d\gamma(\alpha} = \frac{dy}{d\gamma(\beta} + \left(\frac{dy}{d\beta(\alpha} + \frac{dy}{d\alpha(\beta} \frac{d\alpha}{d\beta(\gamma}\right) \frac{d\beta}{d\gamma(\alpha},$$

$$\frac{dx}{d\gamma(\alpha} = \frac{dx}{d\gamma(\beta} + \frac{dx}{d\beta(\gamma} \frac{d\beta}{d\gamma(\alpha} = \frac{dx}{d\gamma(\beta} + \left(\frac{dx}{d\beta(\alpha} + \frac{dx}{d\alpha(\beta} \frac{d\alpha}{d\beta(\gamma}\right) \frac{d\beta}{d\gamma(\alpha},$$

d'où l'on conclut, en effaçant les termes nuls en vertu de deux équations que nous venons d'obtenir, que

$$H \frac{dy}{d\alpha(\gamma} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\alpha(\gamma} = \left\{H \frac{dy}{d\beta(\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\beta(\alpha}\right\} \frac{d\beta}{d\alpha(\gamma},$$

et que

$$H \frac{dy}{d\gamma(\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\gamma(\alpha} = \left\{H \frac{dy}{d\beta(\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\beta(\alpha}\right\} \frac{d\beta}{d\gamma(\alpha};$$

on a donc

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}} = \frac{\frac{\lambda'}{\mu'}\left\{H \frac{dy}{d\alpha(\gamma} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\alpha(\gamma}\right\}}{\frac{\lambda'}{\mu'}\left\{H \frac{dy}{d\gamma(\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{dx}{d\gamma(\alpha}\right\}}.$$

Comme deux fractions ne peuvent être égales sans l'être aussi à celle qu'on forme en prenant pour numérateur la différence de leurs numérateurs, et pour dénominateur celle de leurs dénominateurs, on trouvera, en comparant les deux valeurs obtenues pour

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}},$$

que

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}} = \frac{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]} =$$

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]} = \frac{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]};$$

il suit de là et des résultats obtenus précédemment, qu'on peut mettre la quatrième équation de l'intégrale sous cette dernière forme

$$\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha} - \left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right] + \left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0.$$

Cette forme n'est pas propre en général à calculer la quatrième équation, parce que la nécessité de faire varier x, y, z, dans la valeur de β, multiplie inutilement le nombre des différenciations : mais elle devient la plus commode, quand, en éliminant ces quantités au moyen des trois premières équations de l'intégrale, on obtient une équation entre α, β et γ seulement, d'où l'on tire alors sur-le-champ la valeur de $\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}$. Il arrive dans des cas particuliers que $\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}$ est identique aux trois quantités auxquelles nous venons de trouver qu'il doit toujours être égal ; mais cela n'a pas lieu en général, et alors on trouve encore la quatrième équation de l'intégrale en l'égalant à l'une d'elles, ce qui donne cette équation sous d'autres formes, telles, par exemple, que

dW

$$\left[\frac{dW}{d\alpha(\gamma}\right]+\left[\frac{dW}{d\gamma(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha(\beta}=0;$$

Prenons pour premier exemple l'équation

$$2z=x^2(r+2s+t)-\frac{b^2}{q^2x^2}t,$$

ou

$$x^2r+2x^2s+\left(x^2-\frac{b^2}{q^2x^2}\right)t-2z=0;$$

nous aurons

$$H=x^2,\ K=x^2,\ L=x^2-\frac{b^2}{q^2x^2},\ M=-2z,\ \sqrt{G}=\frac{b}{q};$$

et les deux systèmes d'équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, seront

$$x^2\frac{dy}{dx(\alpha}-x^2-\frac{b}{q}=0,\qquad x^2\frac{dy}{dx(\beta}-x^2+\frac{b}{q}=0,$$

$$x^2\frac{dp}{dx(\alpha}+\left(x^2-\frac{b}{q}\right)\frac{dq}{dx(\alpha}-2z=0,\qquad x^2\frac{dp}{dx(\beta}+\left(x^2+\frac{b}{q}\right)\frac{dq}{dx(\beta}-2z=0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha}-p-q\frac{dy}{dx(\alpha}=0,\qquad \frac{dz}{dx(\beta}-p-q\frac{dy}{dx(\beta}=0.$$

En multipliant les trois équations du premier système respectivement par

$$\lambda=-\frac{2q}{x},\quad \mu=1,\quad \nu=-2x,$$

et en ajoutant les produits qui en résultent, les termes en $\frac{dy}{dx(\alpha}$ se détruiront mutuellement, et le résultat

$$x^2\frac{dp}{dx(\alpha}+x^2\frac{dq}{dx(\alpha}-\frac{b}{q}\frac{dq}{dx(\alpha}-2z+2qx+\frac{2b}{x}-2x\frac{dz}{dx(\alpha}+2px=0$$

étant une différentielle exacte, on aura l'équation du premier ordre

$$x^2p+x^2q-2xz-blq+2blx=\alpha,$$

qu'il faudra d'abord intégrer en y considérant α comme une constante. Pour cela, on la différenciera par rapport à y, ce qui donnera

$$x^2s+\left(x^2-\frac{b}{q}\right)t-2xq=0;$$

et en y substituant à s et à t leurs valeurs

$$s = \frac{dq}{dx\,(a,\gamma} - \frac{\frac{dq}{d\gamma\,(a,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(a,x}} \frac{dy}{dx\,(a,\gamma}; \quad t = \frac{\frac{dq}{d\gamma\,(a,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(a,x}},$$

et égalant séparément à zéro les termes qui contiennent le facteur $\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(a,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(a,x}}$ et ceux où il n'entre pas, on aura les deux équations

$$x^2 \frac{dy}{dx\,(a,\gamma} - x^2 + \frac{b}{q} = 0,$$

$$x^2 \frac{dq}{dx\,(a,\gamma} - 2xq = 0.$$

Cette dernière devient intégrable en la divisant par x^4, et donne

$$\frac{q}{x^2} = \gamma \quad \text{ou} \quad q = \gamma x^2;$$

et en substituant cette valeur dans la première, après qu'elle aura été divisée par x^2, on aura

$$\frac{dy}{dx\,(a,\gamma} = 1 - \frac{b}{\gamma x^4}.$$

d'où l'on tire $y = x + \frac{b}{3\gamma x^3} + \theta$*.

Pour avoir la valeur de z, on mettra dans l'équation proposée γx^2 à la place de q, et

$$\frac{dz}{dx\,(a,\gamma} - \gamma x^2 \left(1 - \frac{b}{\gamma x^4}\right) \text{ ou } \frac{dz}{dx\,(a,\gamma} - \gamma x^2 + \frac{b}{x^2}$$

à la place de p; et comme y n'y entre pas, on n'aura pas à y remplacer y par sa valeur : on trouvera ainsi

$$x^2 \frac{dz}{dx\,(a,\gamma} + b - 2xz - bl\gamma = a, \text{ ou}$$

$$\frac{x^2 \frac{dz}{dx\,(a,\gamma} - 2xz}{x^4} = \frac{a + bl\gamma - b}{x^4}.$$

L'intégrale de cette équation, multipliée par x^2, donne

* θ représente ici une fonction arbitraire de γ.

$$z = \frac{b - a - b\,l\,\gamma}{3\,x} + x^2 \zeta.$$

Ces valeurs de z, de y et de q devant satisfaire à la relation

$$\frac{d\,z}{d\,\gamma\,(a, x} = q\,\frac{d\,y}{d\,\gamma\,(a, x},$$

on aura

$$x^2\,\frac{d\,\zeta}{d\,\gamma\,(a, x} - \frac{b}{3\,\gamma\,x} = \gamma\,x^2\left(\frac{d\,\theta}{d\,\gamma\,(a, x} - \frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\right),$$

qui donne $\zeta = \int \gamma\,d\,\theta$, et par conséquent

$$z = \frac{b - a - b\,l\,\gamma}{3\,x} + x^2 \int \gamma\,d\,\theta;$$

en joignant à cette équation celle que nous avons trouvée précédemment,

$$y = x + \frac{b}{3\,\gamma\,x^3} + \theta,$$

on aura un système de deux équations exprimant l'intégrale de l'équation du premier ordre où a était considéré comme une constante.

En effet, x et y étant les deux variables indépendantes, et prenant d'abord les dérivées de ces deux équations relatives à y, on aura

$$q = -\frac{b}{3\,\gamma\,x}\,\frac{d\,\gamma}{d\,y\,(x} + \gamma\,x^2\,\frac{d\,\theta}{d\,y\,(x},$$

et $$1 = -\frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\,\frac{d\,\gamma}{d\,y\,(x} + \frac{d\,\theta}{d\,y\,(x}.$$

Cette dernière équation réduit la valeur de q donnée par la première, à $q = \gamma\,x^2$: en différenciant ensuite par rapport à x, il vient

$$p = \frac{a + b\,l\,\gamma - b}{3\,x^2} + 2\,x \int \gamma\,d\,\theta - \frac{b}{3\,\gamma\,x}\,\frac{d\,\gamma}{d\,x\,(y} + \gamma\,x^2\,\frac{d\,\theta}{d\,x\,(y},$$

et $$0 = 1 - \frac{b}{\gamma\,x^4} - \frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\,\frac{d\,\gamma}{d\,x\,(y} + \frac{d\,\theta}{d\,x\,(y};$$

d'où

$$\frac{d\,\theta}{d\,x\,(y} = \frac{b}{\gamma\,x^4} + \frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\,\frac{d\,\gamma}{d\,x\,(y} - 1,$$

et $$p = \frac{a + b\,l\,\gamma + 2\,b}{3\,x^2} - \gamma\,x^2 + 2\,x \int \gamma\,d\,\theta.$$

Ces valeurs de p et de q et la valeur de z, substituées dans l'équation

$$x^2 p + x^2 q - 2xz - blq + 2blx = \alpha\,;$$

la rendent évidemment identique.

Les deux équations de cette intégrale n'étant pas sous la forme

$$V = 0\,, \quad \left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = 0\,,$$

il faut d'abord les y ramener par la méthode exposée dans le premier paragraphe de ce Mémoire. Pour cela, en conservant les dénominations que nous y avons adoptées, il faudra représenter par Q la valeur γx^2 de q, et l'on calculera celle de $u = z - Qy$, qui sera

$$u = \frac{b - \alpha - bl\gamma}{3x} + x^2 \int \gamma\, d\theta - \gamma x^3 - \frac{b}{3x} - \gamma \theta x^2\,,$$

ou

$$u = -\gamma x^3 - \frac{\alpha + bl\gamma}{3x} + x^2 \eta\,,$$

en faisant $\int \gamma\, d\theta - \gamma\theta = \eta$: ainsi l'on aura pour l'équation $V = 0$, celle-ci :

$$z = u + Qy = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + bl\gamma}{3x} + x^2 \eta\,;$$

et pour l'équation $\left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = 0$, sa dérivée par rapport à γ, savoir,

$$x^2 y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2 \frac{d\eta}{d\gamma} = 0\,;$$

l'intégrale de la proposée sera donc représentée par les trois équations

$$z = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + bl\gamma}{3x} + x^2 \eta\,,$$

$$x^2 y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2 \frac{d\eta}{d\gamma\,(\alpha} = 0\,,$$

$$-\frac{1}{3x} + x^2 \frac{d\eta}{d\alpha\,(\gamma} = 0\,,$$

pourvu que la valeur de η en fonction de α et de γ soit donnée par la quatrième équation de l'intégrale. Pour calculer cette équation, on se rappellera qu'elle consiste à égaler la quantité $\dfrac{\left[\dfrac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]}{\left[\dfrac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}$, à l'une de celles-ci :

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]},\quad \frac{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]},$$

$$\frac{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{1+2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]},\quad \frac{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}},$$

suivant celle qu'on veut employer des diverses formes sous lesquelles nous avons présenté cette quatrième équation.

On a d'abord

$$\frac{\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]}=\frac{\frac{b}{3\gamma^2x}+x^2\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{x^2\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}}=\frac{\frac{b}{3\gamma^2x^3}+\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}}=$$

$$\frac{\frac{b}{\gamma^2}\,\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}+\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}};$$

on tire ensuite des trois premières équations de l'intégrale

$$p=2\gamma xy-3\gamma x^2+\frac{\alpha+bt\gamma}{3x^2}+2xn;\quad q=\gamma x^2,$$

et comme on a

$$H=x^2,\quad K+\sqrt{G}=x^2+\frac{b}{q},$$

il vient

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}=$$

$$\frac{x^2\left(2xy-2x^2+\frac{b}{3\gamma x^2}+2x\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}+\frac{b}{q}\right)}{\frac{1}{3}+2x^3\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}};$$

mais on tire de la seconde équation de l'intégrale

$$2xy - 2x^2 + 2x\frac{d\eta}{d\gamma\,(\alpha} = \frac{b}{3\gamma x^2};$$

et de la troisième $2x^3 \frac{d\eta}{d\alpha\,(\gamma} = \frac{2}{3}$, ce qui réduit la valeur de

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}$$

à

$$x^2\left(\frac{b}{\gamma x^2} + \frac{b}{q}\right) = \frac{2b}{\gamma}, \text{ parce que } q = \gamma x^2.$$

Pour faire voir que les autres formes de la quatrième équation de l'intégrale conduisent au même résultat, il suffit de montrer que $\frac{2b}{\gamma}$ est aussi la valeur des trois quantités

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}, \quad \frac{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}, \quad \frac{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}.$$

On peut employer la première dans cet exemple, parce que le second système d'équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, fournit une combinaison intégrable qu'on trouve en les multipliant par les mêmes facteurs que celles du premier système, et ajoutant de la même manière les produits de ces multiplications : on obtient ainsi l'équation

$$x^2\frac{dp}{dx\,(\beta} + x^2\frac{dq}{dx\,(\beta} + \frac{b}{q}\,\frac{dq}{dx\,(\beta} - 2z + 2px + 2qx - \frac{2b}{x} - 2x\frac{dz}{dx\,(\beta} = 0,$$

qui donne $\quad x^2p + x^2q + blq - 2xz - 2blx = \beta.$

En mettant dans le premier membre de cette équation, à la place de p et de q, leurs valeurs trouvées plus haut, on aura W : ainsi

$$W = 2\gamma x^3y - 2\gamma x^4 + \frac{\alpha + 4bl\gamma}{3} - 2xz + 2x^3\eta;$$

et par conséquent

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]} = \frac{2x^3y - 2x^4 + \frac{4b}{3\gamma} + 2x^3\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{1}{3} + 2x^3\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}} = \frac{2b}{\gamma},$$

par les mêmes réductions qui nous ont servi à ramener à $\frac{2b}{\gamma}$ l'expression

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}.$$

Comme on a $q = \gamma x^2$, $\mu = 1$, $\sqrt{G} = \frac{b}{\gamma x^2}$, on trouve sur-le-champ

$$\frac{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]} = \frac{2b}{\gamma}.$$

Enfin, en ôtant la valeur de α de celle de β, on trouve

$$\beta - \alpha = 2blq - 4blx = 2bl\frac{q}{x^2} = 2bl\gamma,$$

d'où $\beta = \alpha + 2bl\gamma$, et par conséquent,

$$\frac{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}} = \frac{2b}{\gamma}.$$

Ces différens procédés donnant tous la valeur $\frac{2b}{\gamma}$, il aurait suffi d'en employer un seul, et on aurait obtenu dans tous les cas la même quatrième équation de l'intégrale en égalant cette valeur à

$$\frac{\frac{b}{\gamma^2}\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} + \frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{\frac{d^2n}{d\alpha\, d\gamma}}:$$

on a ainsi $\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{2b}{\gamma}\frac{d^2n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{b}{\gamma^2}\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0$, équation qui ne contient que deux dérivées du second ordre $\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}$ et $\frac{d^2n}{d\alpha\, d\gamma}$; c'est-là tout ce que nous nous étions proposé de faire : mais en examinant

cette équation, on voit qu'en faisant $l\gamma = \varepsilon$, et prenant α et ε au lieu de α et γ pour les deux variables indépendantes, elle devient linéaire à coefficiens constans, et par conséquent susceptible d'être intégrée par les méthodes connues. Alors l'intégrale de l'équation donnée est représentée par ces quatre équations :

$$z = e^{\varepsilon}(x^2 y - x^3) - \frac{\alpha + b\varepsilon}{3x} + x^2 n,$$

$$e^{\varepsilon}(x^2 y - x^3) - \frac{b}{3x} + x^2 \frac{dn}{d\varepsilon\,(\alpha} = 0, \quad \frac{1}{3x} - x^2 \frac{dn}{d\alpha\,(\varepsilon} = 0,$$

$$\frac{d^2 n}{d\varepsilon^2\,(\alpha} - 2b\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\varepsilon} + b\frac{dn}{d\alpha\,(\varepsilon} - \frac{dn}{d\varepsilon\,(\alpha} = 0.$$

Soit, pour second exemple, $r + 2qs + (q^2 - x^2)t - q = 0$; on aura

$$H = 1,\quad K = q,\quad L = q^2 - x^2,\quad M = -q,\quad \sqrt{G} = x,$$

et les deux systèmes deviendront

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} - q - x = 0, \qquad \frac{dy}{dx\,(\beta} - q + x = 0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (q - x)\frac{dq}{dx\,(\alpha} - q = 0, \qquad \frac{dp}{dx\,(\beta} + (q + x)\frac{dq}{dx\,(\beta} - q = 0,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} - p - q\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0, \qquad \frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q\frac{dy}{dx\,(\beta} = 0.$$

Parmi ces six équations, il n'y a que la seconde qui soit une différentielle exacte ; elle donne

$$p + \frac{q^2}{2} - xq + \alpha = 0.$$

En intégrant celle-ci comme une équation aux différentielles partielles du premier ordre, où α représente une constante, on trouve

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \varphi\gamma,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \varphi'\gamma = 0;$$

on a donc, lorsqu'on suppose α variable, $z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + n$, et l'intégrale de la proposée est représentée par les trois équations

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + n,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0, \quad x - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourvu

pourvu que la valeur de n en α et γ soit telle, que

$$\frac{d^2 n}{d\gamma\, d\alpha} + \left(\frac{d^2 n}{d\gamma^2\, (\alpha} - x\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\, (\beta} = 0;$$

où il ne s'agit plus que de mettre à la place de $\frac{d\gamma}{d\alpha\, (\beta}$ sa valeur

$$\frac{d\gamma}{d\alpha\, (\beta} = -\frac{\left[\frac{dp}{d\alpha\, (\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\, (\gamma}\right]}{\left[\frac{dp}{d\gamma\, (\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\, (\alpha}\right]}.$$

Mais la première des trois équations dont se compose l'intégrale, donne, en la différenciant par rapport à x et à y, et supprimant les termes qui sont nuls en vertu des deux autres,

$$p = \gamma x - \frac{\gamma^2}{2} - \alpha \quad \text{et} \quad q = \gamma:$$

lorsqu'au moyen de ces valeurs, on élimine p, q, et leurs dérivées partielles de celle de $\frac{d\gamma}{d\alpha\, (\beta}$, on trouve

$$\frac{d\gamma}{d\alpha\, (\beta} = \frac{1}{x - \gamma + \gamma + x} = \frac{1}{2x}:$$

Cette valeur change l'équation

$$\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \left(\frac{d^2 n}{d\gamma\, (\alpha^2} - x\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\, (\beta} = 0,$$

en

$$2x\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\, (\alpha} - x = 0.$$

Quand on l'a mise sous cette forme, il reste en général à y remplacer x, y, z, par leurs valeurs tirées des trois équations qui représentent l'intégrale; mais comme, dans cet exemple, x est la seule de ces trois quantités qui y soit contenue, il suffira de substituer à x sa valeur prise dans la troisième, et l'on aura

$$2\frac{dn}{d\alpha\, (\gamma}\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\, (\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\, (\gamma} = 0.$$

Cette équation du second ordre entre α, γ, n, peut s'obtenir encore plus simplement en suivant le procédé donné tout-à-l'heure pour le cas où le second système fournit une combinaison intégrable.

En effet, quoique aucune des équations de ce système ne soit une différentielle exacte, on en trouvera une en multipliant la première par

2 et en ôtant le produit de la seconde, on obtiendra ainsi

$$\frac{dp}{dx\,(\beta} + q\frac{dq}{dx\,(\beta} + x\frac{dq}{dx\,(\beta} + q - 2\frac{dy}{dx\,(\beta} - 2x = 0,$$

dont l'intégrale est $\quad p + \frac{q^2}{2} + xq - 2y - x^2 + \beta = 0;$

on en tire $\quad \beta = 2y + x^2 - p - xq - \frac{q^2}{2},$

qui devient $\quad W = 2y + x^2 - 2\gamma x + \alpha,$

lorsqu'on y substitue à p et à q les valeurs que nous venons de trouver pour ces deux quantités; on a donc

$$\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right] = -2x,$$

et

$$\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 1;$$

ce qui donne sur-le-champ la même équation

$$2x\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - x = 0,$$

où il ne s'agit plus que de remplacer x par sa valeur $\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}$.

Il est à remarquer que, dans cet exemple, on obtient aisément une équation entre α, β, γ et n, en retranchant de

$$\beta = W = 2y + x^2 - 2\gamma x + \alpha,$$

le double de la seconde équation de l'intégrale, savoir,

$$2y + x^2 - 2\gamma x + 2\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0:$$

on trouve ainsi,

$$\beta = \alpha - 2\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha};$$

cette équation donne

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}} = \frac{2\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} - 1}{2\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha}},$$

et soit qu'on égale cette valeur à

$$\frac{\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}{\left[\frac{d^2 V}{d\gamma\,(\alpha}\right]} = \frac{\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma}}{\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - x},$$

ou à

$$\frac{\left[\frac{d W}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{d W}{d\gamma\,(\alpha}\right]} = -\frac{1}{2x},$$

on obtient la même équation

$$2x\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - x = 0;$$

c'est-à-dire, en y mettant au lieu de x sa valeur,

$$2\,\frac{d n}{d\alpha\,(\gamma}\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{d n}{d\alpha\,(\gamma} = 0.$$

Cette équation, à laquelle se trouve ramenée l'intégration de

$$r + 2qs + (q^2 - x^2)\,t - q = 0,$$

ne contient plus que deux dérivées du second ordre, et revient à

$$2ps + t - p = 0.$$

L'existence de deux systèmes de trois équations, où l'on considère dans le premier système x et α, et dans le second x et β, comme les deux variables indépendantes, suppose non-seulement que

$$G = K^2 - HL,$$

n'est pas nul, mais encore qu'on n'a ni $H = 0$, ni $L = 0$; c'est-à-dire que l'équation donnée $Hr + 2Ks + Lt + M = 0$, contient les deux dérivées extrêmes du second ordre r et t; car les deux équations

$$H\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

et

$$H\,\frac{dy}{dx\,(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

qui déterminent les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondantes à chacun des deux

systèmes, donnent, quand on a $H = 0$ et par conséquent $G = K^2$;

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \frac{2K}{0} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx\,(\beta} = \frac{0}{0}.$$

La première peut s'écrire ainsi : $\frac{dx}{dy\,(\alpha} = 0$, d'où $x = \phi\alpha$; alors les deux quantités x et α étant fonctions l'une de l'autre, on ne peut les prendre pour les deux variables indépendantes, et il n'y a qu'un des deux systèmes indiqués par les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui soit possible, celui où l'on prend x et β pour les deux variables indépendantes : la valeur de $\frac{dy}{dx\,(\beta}$ qui répond à ce système, se présente, comme nous venons de le voir, sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, quand on veut la conclure des formules générales ; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse l'obtenir aisément, comme nous le verrons tout-à-l'heure.

Dans le cas où l'on aurait $L = 0$, G serait encore égal à K^2, et on aurait ces deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \frac{2K}{H}, \quad \frac{dy}{dx\,(\beta} = 0;$$

la première conduirait à la même transformée que nous allons obtenir d'une manière plus simple, en supposant qu'on change dans la proposée x, y, p, q, r, en y, x, q, p, t; nous verrons qu'alors cette transformée ne contient qu'une seule dérivée du second ordre, savoir, $\frac{d^2 n}{dx\, d\beta}$, d'où il suit que si on l'avait calculée sans faire ce changement, elle n'aurait contenu que celle-ci $\frac{d^2 n}{dy\, d\alpha}$: quant à la seconde, elle exprime, ce qui est d'ailleurs évident, que la condition de ne pas contenir une des deux dérivées extrêmes du second ordre, est satisfaite en continuant de regarder x et y ou une fonction quelconque de y, comme les deux variables indépendantes. On tire en effet de cette seconde valeur $y = \psi\beta$; d'où il suit que β est constant ou variable en même temps que y, et qu'ainsi l'équation qui résulterait de cette transformation ne différerait pas

pas essentiellement de la proposée, et aurait toutes les mêmes dérivées du second ordre.

Si l'on avait $L=0$ dans l'équation donnée, il suffirait d'y changer x, y, p, q, r en y, x, q, p, t, pour en avoir une dans laquelle on eût $H=0$, et dont l'intégrale donnerait immédiatement celle de la proposée, en y écrivant x au lieu de y, et y au lieu de x ; c'est pourquoi, quand il s'agira d'une équation aux différentielles partielles du second ordre, dans laquelle manque une des dérivées extrêmes de cet ordre, nous supposerons toujours que c'est celle qu'on obtient en différenciant deux fois par rapport à x, et nous représenterons l'équation par

$$2K's + L't + M' = 0.$$

Nous avons déjà vu que la formule générale donne $\frac{0}{0}$ pour la valeur de $\frac{dy}{dx(\beta}$, à laquelle correspond le seul système de trois équations qu'on puisse obtenir dans ce cas ; pour déterminer cette valeur et en même temps celle de $\frac{dq}{dx(\beta}$, on substituera

$$\frac{dq}{dx(\beta} - \frac{dy}{dx(\beta} t$$

au lieu de s dans l'équation

$$2K's + L't + M' = 0,$$

et on égalera séparément à zéro les termes indépendans de t et ceux qui seront multipliés par la première puissance de cette dérivée ; on aura ainsi deux équations qui, jointes à celle qui exprime que p et q sont les dérivées de z relativement à x et à y, donneront ce système de trois équations

$$2K' \frac{dy}{dx(\beta} - L' = 0,$$

$$2K' \frac{dq}{dx(\beta} + M' = 0,$$

$$\overline{dx\,(\beta} - p - q\,\overline{dx\,(\beta} = 0.$$

Il est à remarquer que, pourvu que les deux premières équations de ce système soient satisfaites, la proposée le sera aussi ; car, en écrivant $s + \frac{dy}{dx\,(\beta}\,t$ au lieu de $\frac{dq}{dx\,(\beta}$ dans la seconde, et en éliminant ensuite $\frac{dy}{dx\,(\beta}$ entre ces deux équations, on trouve

$$\frac{L'}{2K'} = -\frac{2K's + M'}{2K't},$$

d'où l'on tire immédiatement l'équation proposée

$$2K's + M' + L't = 0.$$

Comme les trois équations du système que nous venons d'obtenir ne contiennent point de dérivée de p, il est évident qu'on n'en peut former une combinaison intégrable que par l'élimination de p; il faudra donc substituer à p, dans les deux premières équations de ce système, sa valeur tirée de la troisième, et examiner si l'on peut former avec les deux équations résultant de cette substitution, une combinaison qui satisfasse aux conditions d'intégrabilité.

Démontrons maintenant que toutes les fois qu'on aura obtenu une telle combinaison, il sera facile de ramener l'intégration de l'équation proposée à celle d'une équation qui ne contiendra qu'une dérivée du second ordre, cette dérivée étant celle qu'on obtient en différenciant successivement par rapport aux deux variables indépendantes.

Soit v la fonction de x, y, z, q, qu'on trouve égale à une constante en intégrant cette combinaison : comme les dérivées qui y sont contenues, sont prises en considérant β comme constant, v sera fonction de β ; mais nous avons vu que cette quantité β peut toujours être remplacée par une de ses fonctions ; nous aurons donc simplement

$$v = \beta.$$

Si nous considérons maintenant cette équation comme une équation aux différentielles partielles, où β est une constante, nous verrons qu'elle appartiendra à la classe de celles qui s'intègrent comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce qu'elles ne contiennent qu'une seule dérivée : il sera donc facile d'en avoir l'intégrale primitive exprimée par une seule équation qui contiendra, avec x, y, z, la quantité β considérée comme une constante et une fonction arbitraire ψx de x.

En remplaçant, dans cette équation, ψx par n, et en regardant dans l'équation qui en résultera, et que je représenterai par

$$W = 0,$$

cette nouvelle quantité n comme une fonction de x et de β, il est évident que le système des deux équations

$$W = 0,$$

$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(x}\right] = 0,$$

donnera la même valeur de q, que l'intégrale de

$$v = \beta,$$

lorsqu'on y supposait β constant et n fonction de x, parce que x ne varie pas dans la différenciation qui donne q : en sorte que la supposition de n fonction de x et de β ne peut introduire dans cette différenciation que des termes dépendans de la variabilité de β dans n, qui sont détruits par ceux qui proviennent des termes où β entre explicitement dans $W = 0$, en vertu de la seconde équation

$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(x}\right] = 0.$$

On voit en même temps que cette valeur de q ne pourra contenir, comme W, que x, y, z, β et n. Cette valeur étant précisément la même qu'on aurait déduite de $W = 0$ seulement, en y supposant β

constant et $n = \varphi x$, excepté que n s'y trouve à la place de φx, si l'on s'en sert pour éliminer n de $W = 0$, on aura, comme dans ce cas, l'équation $v = \beta$, qui sera, par conséquent, satisfaite par l'intégrale

$$W = 0,$$
$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(x}\right] = 0.$$

Mais il ne suffira pas, pour que la proposée le soit, que $v = \beta$; il faudra encore que les deux équations en

$$x,\ y,\ z,\ q,\ \frac{dy}{dx\,(\beta},\ \frac{dz}{dx\,(\beta},\ \frac{dq}{dx\,(\beta},$$

résultant de l'élimination de p entre les trois équations du système d'où l'on est parti, et qui ont conduit à $v = \beta$, aient lieu séparément. Si l'on en chasse q et $\frac{dq}{dx\,(\beta}$ au moyen de la valeur de q, que donne cette dernière équation, elles se réduiront à une seule, où il n'y aura que

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx\,(\beta},\ \frac{dz}{dx\,(\beta},\ \beta,\ n \text{ et } \frac{dn}{dx\,(\beta};$$

c'est cette équation qui doit déterminer n en fonction de x et de β. Il faudra pour cela y substituer à

$$y,\ z,\ \frac{dy}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{dz}{dx\,(\beta},$$

leurs valeurs tirées des deux équations

$$W = 0,$$
$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(x}\right] = 0;$$

et de leurs dérivées du premier ordre, prises en ne faisant varier que x, puisque β ne varie pas dans

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{dz}{dx\,(\beta};$$

mais il n'y a de quantités variables dans ces deux équations que

$$x,\ y,\ z,\ \beta,\ n \text{ et } \frac{dn}{d\beta\,(x},$$

leurs dérivées ne contiendront donc que ces mêmes quantités, et de plus,

$$\frac{dy}{dx\,(\beta},\quad \frac{dz}{dx\,(\beta},\quad \frac{dn}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{d^2 n}{dx\,d\beta};$$

d'où il suit qu'après l'élimination, la transformée ne contiendra plus que

$$x;\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{dx\,(\beta},\quad \frac{dn}{d\beta\,(x} \text{ et } \frac{d^2 n}{dx\,d\beta},$$

et sera par conséquent de la forme

$$\frac{d^2 n}{dx\,d\beta} = f\left(x,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{dx\,(\beta};\ \frac{dn}{d\beta\,(x}\right),$$

ainsi que nous nous étions proposé de le démontrer.

Soit, par exemple, l'équation

$$zs + \frac{zt}{q^2} + pq = 0,$$

on aura

$$z\frac{dq}{dx\,(\beta} + pq = 0;$$

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} - \frac{1}{q^2} = 0;$$

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q\frac{dy}{dx\,(\beta} = 0:$$

les deux équations qu'on obtient en éliminant p seront donc

$$z\,\frac{dq}{dx\,(\beta} + q\,\frac{dz}{dx\,(\beta} - q^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta} = 0,$$

$$q^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta} - 1 = 0,$$

dont la somme est une différentielle exacte, et donne

$$zq - x = \beta,$$

d'où

$$q = \frac{x +}{z},$$

$$\frac{dq}{dx\,(\beta} = \frac{1}{z} - \frac{x+\beta}{z^2}\,\frac{dz}{dx\,(\beta}.$$

Ces valeurs réduisent chacune des deux équations résultant de l'élimination de p, à celle-ci,

$$(x+\beta)^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta} - z^2 = 0;$$

mais l'équation

$$zq = x + \beta,$$

a pour intégrale

$$\frac{z^2}{2} = (x+\beta)\,y - \phi x,$$

celle de la proposée sera donc représentée par

$$\frac{z^2}{2} = (x+\beta)\,y - n,$$

$$y - \frac{dn}{d\beta\,(x} = 0,$$

pourvu que n soit déterminé par l'équation

$$(x+\beta)^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta} - z^2 = 0,$$

qui devient, en y remplaçant y, z et $\frac{dy}{dx\,(}$ par leurs valeurs tirées

des deux précédentes,

$$(x+\beta)^2 \frac{d^2 n}{dx\,d\beta} - 2(x+\beta)\frac{dn}{d\beta\,(x} + 2n = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 n}{dx\,d\beta} - \frac{2}{x+\beta}\,\frac{dn}{d\beta\,(x} + \frac{2n}{(x+\beta)^2} = 0.$$

Cette équation se trouve parmi celles que M. de Laplace a intégrées en intégrales définies ; on aura donc la valeur de n sous cette forme, et en la substituant dans

$$z = \sqrt{2(x+\beta)\,y - 2n},$$

$$y = \frac{dn}{d\beta\,(x},$$

l'intégrale de la proposée sous la même forme.

Reprenons maintenant le cas le plus général, et voyons comment on peut, par une seconde transformation, ramener l'intégration de l'équation donnée à celle d'une autre équation de la forme

$$s = f(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

en supposant toujours qu'on a la valeur v de β déduite d'une combinaison intégrable fournie par le second système. Pour cela, on remarquera d'abord, en examinant les valeurs développées de

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\ d\gamma}\right] \text{ et de } \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]$$

qui ont été données plus haut, qu'elles ne contiennent chacune qu'un seul terme où entrent des dérivées de n du second ordre, et que ces termes sont dans la première,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\alpha\ d\gamma},$$

et dans la seconde,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha};$$

d'où il suit que l'équation

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right] + \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2 (\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta} = 0,$$

à laquelle nous avons ramené l'intégration de la proposée, ne co tiendra aussi de dérivées du second ordre que dans les deux termes

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta}\;\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha}.$$

Pour appliquer à cette équation la méthode d'intégration que no venons de donner pour la formule

$$2K's + L't + M' = 0,$$

dans laquelle elle rentre d'après cette observation, nous ferons

$$\frac{dn}{d\alpha (\gamma} = \pi,\; \frac{dn}{d\gamma (\alpha} = \chi,\; \frac{dn}{d\alpha^2 (\gamma} = \rho,\; \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} = \sigma$$

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha} = \tau;$$

et en substituant $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ à $2K'$ et $\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta}$ à L',

nous aurons, à la place des deux termes $2K's + L't$, ceux-ci:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\sigma + \left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta}\,\tau;$$

il faudra, à l'ordinaire, remplacer σ par

$$\frac{d\chi}{d\alpha (\iota} - \frac{d\gamma}{d\alpha (\iota}\,\tau,$$

ι étant une nouvelle variable indépendante, et égaler séparémen

zé

zéro, les termes où ϖ n'entre pas, et ceux qui multiplient ϖ, pour avoir les deux équations qui doivent donner l'intégrale de l'équation dont nous nous occupons, la seconde de ces deux équations sera donc

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\varepsilon}-\left(\frac{dV}{d\eta}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}=0\,;$$

ainsi

$$\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\varepsilon}=\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta},$$

ou

$$\frac{\dfrac{d\varepsilon}{d\alpha\,(\gamma}}{\dfrac{d\varepsilon}{d\gamma\,(\alpha}}=\frac{\dfrac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\dfrac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}},$$

condition qui exprime que ε est une fonction de β, comme il était aisé de le prévoir, en considérant que ce n'est que quand on prend une fonction de β pour une des variables indépendantes, que la dérivée partielle la plus élevée de la fonction principale, prise par rapport à cette variable, peut disparaître de l'équation qui résulte de cette transformation; on pourra donc prendre $\varepsilon=\beta$, et achever d'intégrer l'équation

$$\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]+\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

à laquelle nous avons ramené la proposée, en suivant le procédé que nous venons d'appliquer à la formule

$$2K's+L't+M'=0:$$

par ce moyen, et en faisant attention que x, y, z de cette formule sont remplacés ici par α, γ, η et que $\varepsilon=\beta$, on aura, pour représenter l'intégrale cherchée, deux équations de la forme

$$W=0,$$

$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(\alpha}\right]=0,$$

W contenant une nouvelle quantité que je nommerai θ, et qui aura été mise à la place de la fonction arbitraire $\psi\alpha$ dans l'intégrale de

$$v = \beta,$$

prise en regardant β comme une constante. Cette nouvelle quantité sera une fonction de α et de β déterminée par une équation du second ordre entre ces trois quantités, qui ne contiendra que le seul coefficient $\frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta}$ de cet ordre, et qu'on pourrait calculer comme nous l'avons vu en traitant de la formule

$$2K' + L't + M' = 0;$$

mais il sera inutile de faire ce calcul, parce qu'on trouvera directement cette même équation, ainsi que l'intégrale de

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

sous la forme qui résulte des deux transformations opérées successivement, en s'y prenant comme il suit.

D'après la manière dont nous avons trouvé les deux équations

$$W = 0,$$

$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(\alpha}\right] = 0,$$

pour représenter l'intégrale de

$$\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right] + \left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

la première ne contiendra que α, β, γ, η et θ; la seconde renfermera en outre $\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha}$, et l'on aura une valeur de la dérivée du premier ordre $\chi = \frac{d\eta}{d\gamma\,(\alpha}$, où il n'y aura que α, β, γ, η et θ qu'on ramenera à ne contenir que α, β, θ et $\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha}$, en y substituant les valeurs de γ et η, tirées des deux premières. Quant à l'autre dérivée

du premier ordre $\pi = \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}$, on la ramenera de même à ne contenir que les mêmes quantités, et de plus $\frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta}$. Par ce moyen, γ, n et $\frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha}$ seront exprimées en fonctions de α, β, θ et $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$, tandis que $\frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}$ le sera en fonctions de α, β, θ, $\frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta}$ et $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$; si l'on substitue ces expressions dans les trois équations de l'intégrale générale représentée par

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{d\,V}{d\,\gamma\,(\alpha}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{d\,V}{d\,\alpha\,(\gamma}\right] = 0,$$

on en aura trois autres que je désignerai par

$$U = 0,$$

$$U' = 0,$$

$$U'' = 0,$$

et qui exprimeront la même intégrale sous une nouvelle forme, pourvu qu'on détermine θ en fonctions de α et de β; de manière que la condition qui, sous la première forme de l'intégrale, était donnée par l'équation

$$\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\beta}\right] + \left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\alpha}\right]\,\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\beta} = 0,$$

soit toujours satisfaite.

Avant de voir comment cette condition doit être exprimée actuellement, et de démontrer qu'il en résulte, pour déterminer θ, une équation de la forme

$$\frac{d^2\,\theta}{d\,\alpha\,d\,\beta} = f\left(\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta},\ \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}\right),$$

il est nécessaire de remarquer qu'en vertu des deux équations

$$U' = 0, \quad U'' = 0,$$

les dérivées partielles de $U = 0$ seront toutes deux nulles, parce que, d'après la manière dont celles-ci ont été formées, on aura

$$\left[\frac{d\,U}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right] = U' \,\frac{d\,\gamma}{d\,\beta\,(\,\alpha},$$

et

$$\left[\frac{d\,U}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right] = U'' + U' \,\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\,\beta}.$$

Il semble, d'après cette observation, qu'on aurait pu se dispenser de calculer U' et U'', et se borner à faire la substitution dans U, pour joindre ensuite à $U = 0$ les deux équations

$$\left[\frac{d\,U}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right] = 0 \text{ et } \left[\frac{d\,U}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right] = 0,$$

puisqu'elles semblent équivalentes à

$$U' = 0 \text{ et } U'' = 0,$$

aux facteurs près,

$$\frac{d\,\gamma}{d\,\beta\,(\,\alpha} \text{ et } \frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\,\beta},$$

qu'on pourrait supprimer ; mais ce procédé serait beaucoup trop compliqué, comme il est aisé de le voir, et il deviendrait nécessaire de démontrer que les dérivées

$$\frac{d^2\,n}{d\,\beta^2\,(\,\alpha} \text{ et } \frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\,\beta},$$

qui se trouveraient dans

$$\left[\frac{d\,U}{d\,(\,\alpha}\right] \text{ et } \left[\frac{d\,U}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right],$$

puisque U contient $\frac{d\,n}{d\,\beta\,(\,\alpha}$, n'entreraient, la première, que dans un

facteur commun à tous les termes de $\left[\frac{d\,U}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right]$, et la seconde que dans un facteur commun à tous ceux de $\left[\frac{d\,U}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right]$, facteurs qui ne s'évanouissent pas en vertu de $\left[\frac{d\,U}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right] = 0$, au lieu qu'en formant les trois équations

$$U = 0,$$
$$U' = 0;$$
$$U'' = 0,$$

par la substitution des valeurs de

$$\gamma,\ \eta\ \frac{d\,\eta}{d\,\gamma\,(\,\alpha},\quad \frac{d\,\eta}{d\,\alpha\,(\,\gamma};$$

dans

$$V = 0,$$
$$\left[\frac{d\,V}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right] = 0,$$
$$\left[\frac{d\,V}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right] = 0;$$

on voit, d'après la forme de ces valeurs, que U et U' ne peuvent contenir que

$$\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha};$$

et U'' que

$$\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha},\ \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\,\beta};$$

Maintenant, pour exprimer la condition

$$\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right] + \left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\,\alpha}\right]\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\,\beta} = 0,$$

il faut faire attention que U' étant la valeur que prend $\left[\frac{d\,V}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]$

par la substitution, on a précisément

$$\left[\frac{d\,U'}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right]=\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right]+\left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\,\alpha}\right]\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\,\beta}=0\,;$$

en sorte que la condition demandée est simplement représentée par l'équation

$$\left[\frac{d\,U'}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right]=0\,,$$

dont il faut éliminer x, y, z, au moyen des trois équations

$$U=0\,,$$

$$U'=0\,,$$

$$U''=0\,,$$

pour avoir, entre les trois variables α, β, θ, l'équation du second ordre par laquelle la valeur de θ doit être déterminée pour que ces trois équations expriment l'intégrale générale de la proposée. Cette équation ne contiendra que la seule dérivée du second ordre $\frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\beta}$, puisqu'il a été démontré que U' n'en contient qu'une du premier, qui est $\frac{d\,n}{d\,\beta\,(\,\alpha}$.

Les calculs précédens sont nécessaires à la démonstration de la méthode que je viens d'exposer; mais l'emploi de cette méthode n'exige, comme l'on voit, qu'un petit nombre d'opérations indispensables : elle peut être encore abrégée, en remarquant qu'au lieu d'opérer sur l'équation entre α, γ, n, renfermant

$$\alpha,\ \gamma,\ n,\ \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\,\gamma},\ \frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\,\alpha},\ \frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\gamma},\ \frac{d^2\,n}{d\,\gamma^2\,(\,\alpha},$$

qui résulte de la première transformation, pour en tirer l'intégrale particulière du premier ordre avec une constante arbitraire β, intégrale que nous avons représentée par $\nu=\beta$, il suffira, pour l'obtenir, de

chasser x, y, z, p, q de la valeur de β, déduite de la combinaison intégrale du second système de l'équation donnée, si cette dernière valeur a été calculée. Dans ce cas, ce procédé est préférable à tout autre, parce qu'il donne sur-le-champ la valeur de n, et qu'il devient par conséquent inutile de calculer la quatrième équation de l'intégrale. Mais il est souvent plus difficile de reconnaître que le second système déduit de l'équation donnée peut fournir une combinaison intégrale, que de s'apercevoir, après la première transformation, qu'on en peut former une avec le système déduit de l'équation du second ordre en n, et il vaut mieux alors faire les opérations dans l'ordre où elles viennent d'être indiquées, en calculant la première transformée, sans s'attacher à reconnaître si les deux systèmes qu'on tire de la proposée peuvent fournir chacun une combinaison intégrale, ou s'il n'y en a qu'un seul, on examine ensuite la première transformée pour voir si elle en peut donner une. Il est bon d'observer aussi que si la première transformée était linéaire, on pourrait en faire évanouir la dérivée extrême $\frac{d^2 n}{d \gamma^2 (\alpha}$, sans changer la fonction n en une nouvelle fonction θ, comme il résulte de la théorie connue de ces équations; alors le calcul deviendrait beaucoup plus simple, parce que l'équation

$$2 K' \frac{d \gamma}{d \alpha (\beta} - L' = 0,$$

qui ferait partie du système fourni par la première transformée, ne contenant que les deux variables α et γ, s'intégrerait immédiatement et donnerait

$$f(\alpha, \gamma) = \beta;$$

il suffirait alors de substituer à γ, dans l'équation $V = 0$, sa valeur tirée de

$$f(\alpha, \gamma) = \beta,$$

pour avoir $U = 0$; et comme cette équation ne contiendrait plus alors que x, y, z, α, β et la fonction n de α et de β, sans qu'il s'y

trouvât une dérivée du premier ordre de n, on aurait, pour représenter l'intégrale générale, les trois équations

$$U = 0,$$

$$\left[\frac{dU}{d\alpha\,(\beta}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{dU}{d\beta\,(\alpha}\right] = 0,$$

auxquelles il faudra joindre

$$\left[\frac{d^2 U}{d\alpha\, d\beta}\right] = 0,$$

et en éliminer x, y, z, au moyen des trois autres, pour avoir l'équation du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} = f\left(\alpha, \beta, n, \frac{dn}{dx\,(\beta}, \frac{dn}{d\beta\,(\alpha}\right),$$

qui doit déterminer n.

Si l'on avait trouvé dans chacun des deux systèmes déduits de la proposée une combinaison intégrable, on reconnaîtrait ce cas, que nous verrons bientôt être celui où tombe l'équation du son, quand les vibrations de l'air ont une grandeur finie, lorsqu'on substituerait à x, y, z, p et q, dans $v = \beta$, leurs valeurs tirées de l'intégrale de l'autre équation $u = \alpha$, prise en regardant α comme une constante : car, puisqu'il doit en résulter une équation entre α, β et γ seulement, il faudrait que n et celles de ses dérivées qui sont contenues dans x, y, z, disparussent d'eux-mêmes de l'équation $v = \beta$, pour qu'il ne restât que

$$f(\alpha, \gamma) = \beta.$$

Éclaircissons les diverses circonstances que présente l'usage de cette méthode, en l'appliquant à quelques exemples.

Nous avons vu que les deux systèmes déduits de l'équation

$$r + 2qs + (q^2 - x^2)\,t - q = 0,$$

fournissaient chacun une combinaison intégrable d'où résultaient les deux

deux équations

$$p + \frac{q^2}{2} - xq + \alpha = 0,$$

$$p + \frac{q^2}{2} + xq - 2y - x^2 + \beta = 0,$$

et qu'en représentant son intégrale par ce système

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + n,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{dn}{d\gamma}(\alpha = 0,$$

$$x - \frac{dn}{d\alpha}(\gamma = 0,$$

trouvé en intégrant la première comme si α était une constante, et en le faisant ensuite varier, il fallait que n fût déterminé par l'équation

$$2 \frac{dn}{d\alpha}(\gamma \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2}(\alpha - \frac{dn}{d\alpha}(\gamma = 0,$$

ou

$$2\pi\sigma + \tau - \pi = 0.$$

Comme on a ici

$$K' = \pi, \quad L' = 1, \quad M' = -\pi,$$

on obtiendra ce système de trois équations

$$2\pi \frac{d\gamma}{d\alpha}(\beta - 1 = 0,$$

$$2\pi \frac{d\chi}{d\alpha}(\beta - \pi = 0,$$

$$\frac{dn}{d\alpha}(\beta - \pi - \chi \frac{d\gamma}{d\alpha}(\beta = 0,$$

dont la seconde devient une différentielle exacte en la divisant par π, et donne

$$2\chi - \alpha + \beta = 0,$$

$$\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = \chi = \frac{\alpha - \beta}{2}\ *,$$

$$n = \frac{\alpha - \beta}{2}\,\gamma + \phi\alpha,$$

en sorte que l'intégrale de

$$2\,\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourra être représentée par

$$n = \frac{\alpha - \beta}{2}\,\gamma + \theta,$$

$$\frac{\gamma}{2} - \frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} = 0,$$

en y déterminant θ convenablement. On tire de cette intégrale

$$\gamma = 2\,\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha},$$

et

---

* On peut obtenir dans cet exemple la même valeur de $\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}$, en la déduisant de l'équation

$$p + \frac{q^2}{2} + xq - 2y - x^2 + \beta = 0;$$

il faut pour cela y remplacer d'abord p et q par leurs valeurs tirées de l'intégrale, ce qui donne, comme nous l'avons vu,

$$2\gamma x - \alpha - 2y - x^2 + \beta = 0,$$

et y mettre ensuite à la place de y sa valeur

$$\gamma x - \frac{x^2}{2} - \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha};$$

alors comme x s'en va de lui-même, on n'a pas besoin de l'élimination, et on trouve immédiatement

$$2\,\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} - \alpha + \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\frac{d\,n}{d\,\alpha\,(} = \frac{\gamma}{2} + \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\,\beta},$$

parce que les termes en $\frac{d\,\beta}{d\,\alpha\,(\,\gamma}$ qui devraient entrer dans cette valeur, s'évanouissent en vertu de la seconde équation. On a de plus, en éliminant γ,

$$n = (\alpha - \beta)\,\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha} + \theta,$$

$$\frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma} = \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta} + \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha};$$

substituant ces deux valeurs, ainsi que celles de γ et de $\frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha}$, pour lesquelles nous avons trouvé

$$2\,\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha - \beta}{2},$$

dans les trois équations qui représentent l'intégrale, il vient

$$z = (2y + x^2 + \alpha - \beta)\,\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha} - 2x\left(\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right)^2 - \alpha x + \theta,$$

$$2y + x^2 - 4x\,\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha} + \alpha - \beta = 0,$$

$$x - \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta} - \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha} = 0.$$

Ces trois équations expriment l'intégrale générale de

$$r + 2qs + (q^2 - x^2) - q = 0,$$

sous une forme telle que la fonction θ dépend d'une équation du second ordre, renfermant une seule dérivée de cet ordre, équation qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle partielle par rapport à α de la seconde équation de cette intégrale; on a ainsi

$$4x\,\frac{d^2\,\theta}{d\,\alpha\,d\,\beta} - 1 = 0,$$

et en éliminant x, puisqu'il ne reste dans cette équation ni y ni z,

$$4\left(\frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta} + \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}\right)\frac{d^2\,\theta}{d\,\alpha\,d\,\beta} - 1 = 0.$$

Telle est l'équation à l'intégration de laquelle celle de la proposée est ramenée, et qui n'est autre que

$$s = \frac{1}{4\,(p + q)};$$

des recherches sur la manière de l'intégrer m'éloigneraient de l'objet de ce Mémoire; je compte m'en occuper ailleurs, et je me bornerai, quant à présent, à montrer comment on la peut vérifier.

Il est aisé de voir d'abord que la dérivée partielle de la première, par rapport à β, contient $\frac{d^2\,\theta}{d\,\beta^2\,(\alpha}$ dans tous ses termes, et qu'elle est égale à la seconde multipliée par ce facteur; sa dérivée partielle relative à α se compose de cette seconde équation multipliée par $\frac{d^2\,\theta}{d\alpha\,d\beta}$, ajoutée à la troisième prise avec des signes contraires : ces deux dérivées partielles s'évanouissent donc; et en différenciant la valeur de z alternativement par rapport à x et y, on a

$$p = 2\,x\,\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha} - 2\left(\frac{d\,\theta}{d\;\;(\alpha}\right)^2 - \alpha,$$

$$q = 2\,\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha};$$

ces valeurs satisfont évidemment à

$$p + \frac{q^2}{2} - x\,q + \alpha = 0\,{}^*.$$

---

* On voit aussi qu'en ôtant de cette équation

$$2\,y + x^2 - 2\,x\,q + \alpha - \beta = 0,$$

qu'on trouve en remplaçant $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$ par $\frac{q}{2}$ dans la seconde, on trouve l'autre équation

$$p + \frac{q^2}{2} + x\,q - 2\,y - x^2 + \beta = 0.$$

On a ensuite en vertu de la seconde

$$y = 2x\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2},$$

et par conséquent,

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 2\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} - x + \left(2x\,\frac{d^2\theta}{d\beta^2\,(\alpha} + \frac{1}{2}\right)\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = q - x$$

$$+ \frac{1}{2}\left(4x\,\frac{d^2\theta}{d\beta^2\,(\alpha} + 1\right)\frac{d\beta}{dx\,(\alpha};$$

mais l'équation

$$x = \frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} + \frac{d\theta}{d\alpha\,(\beta},$$

donne

$$\frac{dx}{d\beta\,(\alpha} = \frac{d^2\theta}{d\beta^2\,(\alpha} + \frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta};$$

ou

$$\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = \frac{1}{\frac{d^2\theta}{d\beta^2\,(\alpha} + \frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta}};$$

et comme

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta} = \frac{1}{4\left(\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} + \frac{d\theta}{d\alpha\,(\beta}\right)} = \frac{1}{4x};$$

on a

$$\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = \frac{4x}{4x\,\frac{d^2\theta}{d\beta^2\,(\alpha} + 1};$$

valeur qui réduit celle de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ à

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = q + x:$$

cette valeur est celle de

$$-\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}};$$

et l'équation

$$p+\frac{q^2}{2}-xq+\alpha=0,$$

que nous venons de trouver, donne, en la combinant avec cette valeur

$$\frac{r+(q-x)s-q}{s+(q-x)t}=\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}=-q-x,$$

d'où l'on tire immédiatement l'équation proposée

$$r+2qs+(q^2-x^2)t-q=0.$$

Soit maintenant l'équation

$$x^4r-4x^2qs+3q^2t+2x^3p=0,$$

on aura

$H=x^4$, $K=-2x^2q$, $L=3q^2$, $M=2x^3p$, et $\sqrt{G}=-xq$*;
ainsi les deux premières équations du premier système seront

$$x^2\frac{dy}{dx(\alpha}+3q=0,$$

$$x^2\frac{dp}{dx(\alpha}-q\frac{dq}{dx(\alpha}+2px=0.$$

Cette dernière équation est intégrable, et donne

$$x^2p-\frac{q^2}{2}=\alpha.$$

* En prenant $G=x^2q$, qui ne ferait que changer les deux systèmes l'un contre l'autre, et le calcul resterait le même en opérant sur le second, comme je vais le faire sur le premier.

En traitant celle-ci comme une équation du premier ordre, où α est une constante, on trouve pour son intégrale

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{2x} + \varphi\gamma,$$

$$y - \frac{\gamma}{x} + \varphi'\gamma = 0,$$

d'où il suit que celle de la proposée est représentée par les trois équations

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{2x} + n,$$

$$y - \frac{\gamma}{x} + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourvu que la valeur de n soit déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \left(\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{1}{x}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

il serait facile de trouver la valeur de $\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}$ pour la mettre dans cette équation ; on obtiendrait

$$2\gamma\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0;$$

mais comme cette équation est linéaire, il n'est pas même nécessaire de la calculer; elle ne pourrait servir qu'à donner la valeur de n en α et β, qu'on trouvera plus simplement ainsi : en changeant le signe que nous avons donné à $\sqrt{G}$ dans le premier système, nous aurons pour le second,

$$x^2\frac{dy}{dx\,(\beta} + q = 0,$$

$$x^2\frac{dp}{dx\,(\beta} - 3q\frac{dq}{dx\,(\beta} + 2px = 0.$$

Il est inutile d'y comprendre

$$\frac{dz}{dx(\beta} - p - q\,\frac{dy}{dx(\beta},$$

parce que z n'entre pas dans ces équations; on voit d'ailleurs que seconde est une différentielle exacte, et donne

$$px^2 - \frac{3q^2}{2} + \beta = 0;$$

mais on tire des trois équations dont se compose l'intégrale

$$p = \frac{2\alpha + \gamma^2}{2x^2}, \quad q = \gamma,$$

et par conséquent,

$$\alpha - \gamma^2 + \beta = 0,$$

ou

$$\gamma = \sqrt{\alpha + \beta};$$

on aura ainsi les trois équations

$$z = y\sqrt{\alpha + \beta} - \frac{3\alpha + \beta}{2x} + n,$$

$$\frac{y}{2\sqrt{\alpha + \beta}} - \frac{3}{2x} + \frac{dn}{d\alpha(\beta} = 0,$$

$$\frac{y}{2\sqrt{\alpha + \beta}} - \frac{1}{2x} + \frac{dn}{d\beta(\alpha} = 0,$$

pourvu que n soit déterminé par l'équation

$$-\frac{y}{4(\alpha + \beta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} = 0,$$

après qu'on a éliminé y au moyen des trois autres, les deux dern donnent

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha + \beta}} + 3\,\frac{dn}{d\beta(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha(\beta} = 0,$$

et l'on trouve, en chassant y,

$$4\,(\alpha+\beta)\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}+3\,\frac{dn}{d\beta\,(\alpha}-\frac{dn}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

qui appartient encore à l'une des classes d'équation dont M. de Laplace a trouvé l'intégrale générale en intégrales définies ; on aura donc sous cette forme la valeur de n; et en la substituant dans les trois équations que nous venons d'obtenir, et qu'on peut écrire ainsi :

$$z=y\sqrt{\alpha+\beta}-\frac{3\,\alpha+\beta}{2\,x}+n,$$

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha+\beta}}+3\,\frac{dn}{d\beta\,(\alpha}-\frac{dn}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{dn}{d\beta\,(\alpha}-\frac{dn}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

on aura l'intégrale complète de la proposée.

Je prendrai pour dernier exemple l'équation

$$r+2qs+(q^2-b^2)t=0;$$

dont dépend le mouvement d'un fluide élastique, lorsqu'on fait entrer dans le calcul la grandeur de ses vibrations. On trouve pour cette équation deux systèmes qui présentent chacun une combinaison intégrable; en intégrant ces deux combinaisons, et écrivant, pour éviter les fractions, $2b\alpha$ et $2b\beta$ au lieu de α et β, on a

$$p+\frac{q^2}{2}-bq=2b\alpha,$$

et

$$p+\frac{q^2}{2}+bq=2b\beta:$$

la première a pour intégrale, en y regardant α comme constant,

$$z = \gamma y + \left(2b\alpha + b\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right)x + \phi\gamma,$$

$$y + (b - \gamma)x + \phi'\gamma = 0,$$

intégrale que M. Poisson a indiquée le premier dans un Mémoire où il intègre de la même manière une classe très-étendue d'équations aux différentielles partielles. (Voy. la *Correspondance sur l'École polytechnique*, tom. II, pag. 410). Celle de la proposée peut donc être représentée par le système des trois équations

$$z = \gamma y + \left(2b\alpha + b\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right)x + n,$$

$$y + (b - \gamma)x + \frac{dn}{d\gamma}(\alpha = 0$$

$$2bx + \frac{dn}{d\alpha}(\gamma = 0,$$

en déterminant convenablement n, qui serait alors donné par une équation du second ordre entre α, γ, n, contenant deux dérivées de cet ordre : mais il ne sera pas nécessaire de la calculer, parce que les trois équations que nous venons d'obtenir donnent

$$p = 2b\alpha + b\gamma - \frac{\gamma^2}{2}, \quad q = \gamma,$$

et qu'en mettant ces valeurs dans l'équation en β, on a une équation qui ne renferme que α, β, γ, savoir :

$$2b\alpha + 2b\gamma = 2b\beta,$$

ou

$$\gamma = \beta - \alpha;$$

d'où il suit que l'équation du second ordre d'où l'on aurait pu tirer la valeur de t, aurait été linéaire; et d'après ce que nous avons dit de ce cas où la méthode générale se simplifie beaucoup, il suffit d'éliminer γ de la valeur de z, et de joindre à l'équation qui en résulte ses dérivées partielles relatives à α et à β, et sa seconde dérivée partielle,

prise une fois par rapport à α et une fois par rapport à β, pour avoir les quatre équations

$$z = (\beta - \alpha) y + \left[b(\beta + \alpha) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \right] x + n,$$

$$y + (b - \beta + \alpha) x + \frac{d n}{d \beta\, (\alpha} = 0,$$

$$- y + (b + \beta - \alpha) x + \frac{d n}{d \alpha\, (\beta} = 0,$$

$$x + \frac{d^2 n}{d \alpha\, d \beta} = 0,$$

dont les trois premières exprimeront l'intégrale de

$$r + 2 q s + (q^2 - b^2) t = 0,$$

pourvu que n soit déterminée par l'équation linéaire à coefficiens constans,

$$2 b \frac{d^2 n}{d \alpha\, d \beta} - \frac{d n}{d \alpha\, (\beta} - \frac{d n}{d \beta\, (\alpha} = 0,$$

dont on connaît l'équation primitive générale en intégrales définies.

Après avoir calculé cette valeur de n, il n'y aura plus qu'à la substituer dans les trois équations dont se compose l'intégrale, et qu'on peut, si l'on veut, écrire ainsi :

$$z = (\beta - \alpha) y + \left[b(\beta + \alpha) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \right] x + n,$$

$$y = (\beta - \alpha) x - \frac{1}{2} \left(\frac{d n}{d \beta\, (\alpha} - \frac{d n}{d \alpha\, (\beta} \right),$$

$$x = - \frac{1}{2 b} \left(\frac{d n}{d \beta\, (\alpha} + \frac{d n}{d \alpha\, (\beta} \right).$$

J'ai supposé, dans les calculs précédens, que l'intégrale de l'équation du premier ordre entre x, y, z, p, q, α, où α est considéré comme une constante, s'obtenait par un système de deux équations entre cette constante et les quatre variables x, y, z, γ, et qui fût tel, qu'une

des équations de ce système fût la dérivée partielle de l'autre par rapport à γ. C'est, en effet, ce qui a lieu en général; mais il pourrait arriver que p et q n'entrassent qu'à la première puissance dans l'équation entre x, y, z, p, q, α, ou qu'elle fût décomposable en facteurs qui présentassent cette circontance. Son intégrale ne serait plus alors représentée de la même manière.

Pour y appliquer la même transformation, il faudra d'abord remarquer que cette équation, ou ses différens facteurs, serait, dans ce cas, de la forme

$$Pp + Qq + R = 0,$$

où P, Q, R ne contiendraient que x, y, z et α; son intégrale s'obtiendrait alors par l'intégration simultanée de deux équations du premier ordre, représentées, d'après la notation dont j'ai déjà fait usage, par

$$P \frac{dz}{dx(\alpha, \gamma} + R = 0,$$

et

$$P \frac{dy}{dx(\alpha, \gamma} - Q = 0.$$

Ces deux équations réunies à

$$\frac{dz}{dx(\alpha, \gamma} - p - q \frac{dy}{dx(\alpha, \gamma} = 0,$$

exprimeront, ainsi qu'il a été dit précédemment, les mêmes relations que le second système déduit de la proposée, avec cette seule différence que les dénominateurs des termes des équations dont se compose ce second système, contiennent $dx(\beta$ au lieu de $dx(\alpha, \gamma$. Il s'ensuit que si l'on élimine α qui n'entre point dans le second système en combinant les deux équations

$$P \frac{dz}{dx(\alpha, \gamma} + R = 0,$$

$$P \frac{dy}{dx(\alpha, \gamma} - Q = 0,$$

on en aura une qu'on tirerait également de ces deux-ci :

$$H \frac{dy}{dx\,(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

et

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q \frac{dy}{dx\,(\beta} = 0,$$

puisque la troisième équation de ce système

$$H \frac{dp}{dx\,(\beta} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{dx\,(\beta} + M = 0,$$

contenant

$$\frac{dp}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{dq}{dx\,(},$$

ne peut concourir à la formation d'une équation où ces dérivées n'entrent pas. On voit par-là que, dans le cas où l'intégrale particulière du premier ordre, tirée d'un des systèmes, ne contient p et q qu'à la première puissance, on peut toujours former avec les équations de l'autre système une combinaison qui ne renferme que x, y, z et leurs dérivées mutuelles. Si l'on voulait la déduire de ce second système, on ne pourrait le faire que par une sorte de tâtonnement ; mais on la trouvera sur-le-champ, en éliminant α entre

$$P \frac{dz}{dx\,(\alpha, \gamma} + R = 0,$$

$$P \frac{dy}{dx\,(\alpha, \gamma} - Q = 0.$$

Après l'avoir ainsi obtenue, on n'aura qu'à y appliquer les règles connues, pour savoir si elle peut avoir une intégrale exprimée par une seule équation entre x, y, z et une constante arbitraire, et en trouver dans ce cas l'intégrale ; alors γ sera nécessairement une fonction de β seul, ou plutôt on pourra prendre $\beta = \gamma$: car ces deux quantités pourraient être mises indifféremment à la place de la constante arbitraire dont nous venons de parler, puisque l'équation différentielle qui a con-

duit à l'intégrale où elle se trouve avait également lieu entre

$$x, y, z, \frac{dy}{dx\,(\alpha, \gamma}, \quad \frac{dz}{dx\,(\alpha, \gamma},$$

et entre

$$x, y, z, \frac{dy}{dx\,(\beta}, \quad \frac{dz}{dx\,(\beta},$$

et qu'on en a fait disparaître α dans le premier cas.

Cette équation différentielle étant intégrable et résultant du second système, on doit pouvoir ramener l'intégration de la proposée à celle d'une équation du second ordre de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

comme dans tous les autres cas où le second système fournit une combinaison intégrable. Cependant la méthode que je viens de donner pour atteindre ce but ne peut plus être employée, puisqu'elle suppose qu'on a préalablement ramené l'intégration proposée à celle d'une équation de la forme

$$s + tF(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q),$$

par le second procédé, c'est-à-dire, en substituant à la place de p et de q leurs valeurs dans $v = \beta$, pour obtenir l'équation $W = \beta$, et en tirer ensuite

$$\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = -\frac{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]},$$

tandis que v ne contient alors ni p ni q, qu'il est par conséquent identique à W, et que α et γ ne peuvent être introduits dans cette quantité W par une substitution qui ne saurait plus avoir lieu.

Voici le procédé qu'il faut suivre dans le cas où cette exception se rencontre : puisqu'on peut continuer de prendre alors $v = \beta$, on aura

les deux équations

$$P \frac{dz}{dx\,(\beta} + R = 0,$$

$$P \frac{dy}{dx\,(\beta} - Q = 0,$$

qu'on pourra traiter comme si elles étaient aux différentielles ordinaires; on en tirera ainsi deux équations primitives, dont l'une ne contiendra que x, y, z, β, puisqu'on suppose intégrable l'équation différentielle qui résulte de l'élimination de α, et l'autre contiendra x, y, z, α, β, $\phi\beta$; et on écrira dans cette dernière η au lieu de $\phi\beta$, parce que cette quantité doit se changer, comme nous l'avons vu, en une fonction de α et de β, lorsqu'on fera varier α pour généraliser l'intégrale.

Représentons par $V = 0$ ce que devient la dernière après qu'on en a éliminé β au moyen de l'autre; en sorte que ces deux équations soient

$$v = \beta,$$

$$V = 0,$$

où β n'entre que dans le terme où il est écrit; elles satisferont nécessairement, comme on l'a vu, au second système, lorsqu'on considérera α et η comme des constantes, et par conséquent aussi quand on fera varier ces deux quantités de manière,

1.° Que les valeurs de p et de q soient toujours les mêmes;

2.° Que les termes provenant de la variabilité de α et de η dans leurs dérivées disparaissent d'eux-mêmes.

On remplira la première condition en joignant aux deux précédentes celle-ci :

$$\left[\frac{dV}{d\alpha}\right] = 0.$$

Le système de ces trois équations représentera donc l'intégrale cher-

chée, pourvu que la valeur de n en fonctions de α et β soit déterminée de manière à satisfaire à la seconde. Reste à trouver l'équation du second ordre qui donne cette valeur, et à démontrer qu'elle ne contient que

$$\alpha,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{d\alpha\,(\beta},\ \frac{dn}{d\beta\,(\alpha}\ \text{et}\ \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}.$$

Or, les valeurs de

$$\frac{dy}{dx\,(\beta}\ \text{et de}\ \frac{dz}{dx\,(\beta},$$

tirées de ces trois équations, étant évidemment les mêmes, soit que α et n soient variables ou constans, puisque ces quantités n'entrent pas dans $v = \beta$, deux des trois équations du second système, qui ne contiennent que ces dérivées, seront encore satisfaites; mais la troisième

$$H\frac{dp}{dx\,(\beta} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\beta} + M = 0,$$

ne pourra l'être qu'en vertu de la condition qui doit déterminer n.

Pour l'exprimer, on multipliera d'abord cette équation par $\frac{dx}{d\alpha\,(\beta}$, ce qui la changera en

$$H\frac{dp}{d\alpha\,(\beta} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha\,(\beta} + M\frac{dx}{d\alpha\,(\beta} = 0;$$

on remarquera ensuite que les valeurs de p et de q, tirées de l'équation $V = 0$, en la différenciant alternativement par rapport à x et par rapport à y, et en omettant dans ses différentielles les termes que

$$\left[\frac{dV}{d\alpha}\right] = 0$$

fait évanouir, ne pourront contenir que

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ n\ \text{et}\ \frac{dn}{d\beta\,(\alpha},$$

cette

cette dernière quantité se trouvant multipliée dans l'une de ces différentielles par $\frac{d\beta}{dx(y}$ et dans l'autre par $\frac{d\beta}{dy(x}$, qu'on remplacera par leurs valeurs déduites de l'autre équation $v=\beta$.

Les valeurs de

$$\frac{dp}{d\alpha(\beta} \text{ et de } \frac{dq}{d\alpha(\beta},$$

qu'on trouvera en différenciant celles de p et de q, renfermeront donc $\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}$; mais il ne s'y trouvera que cette seule dérivée du second ordre de la fonction n; en les mettant, ainsi que celles de p et de q, dans

$$H\frac{dp}{d\alpha(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(\beta}+M\frac{dx}{d\alpha(\beta}=0,$$

qui eût été identique si on avait considéré α, n et $\frac{dn}{d\beta(\alpha}$ comme des constantes, on aura

$$H\left[\frac{dp}{d\alpha(\beta}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha(\beta}\right]=0,$$

en supprimant les autres termes, puisqu'ils se détruisent mutuellement; et il ne s'agira plus que d'y remplacer x, y, z, par leurs valeurs tirées des trois équations dont se compose l'intégrale, pour avoir l'équation cherchée entre

$$\alpha,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{d\alpha(\beta},\ \frac{dn}{d\beta(\alpha} \text{ et } \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}.$$

Soit, par exemple :

$$xr+(p+x)s+pt-x=0,$$

on aura

$$H=x,\ K=\frac{p+x}{2},\ L=p,\ M=-x,\ \sqrt{G}=\frac{p-x}{2},$$

et les deux systèmes seront

$x\dfrac{dy}{dx(\alpha} - p = 0,$	$\dfrac{dy}{dx(\beta} - 1 = 0,$
$\dfrac{dp}{dx(\alpha} + \dfrac{dq}{dx(\alpha} = 1 = 0,$	$x\dfrac{dp}{dx(\beta} + p\dfrac{dq}{dx(\beta} - x = 0,$
$\dfrac{dz}{dx(\alpha} - p - q\dfrac{dy}{dx(\alpha} = 0,$	$\dfrac{dz}{dx(\beta} - p - q\dfrac{dy}{dx(\beta} = 0.$

Le premier donne d'abord

$$p + q - x + \alpha = 0,$$

équation linéaire du premier ordre, dont l'intégration, à cause de

$$P = 1,\ Q = 1,\ R = -x + \alpha,$$

dépend de celle de

$$\frac{dz}{dx(\alpha,\gamma} = x - \alpha,$$

et de

$$\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma} - 1 = 0.$$

Cette dernière s'intègre immédiatement; et comme elle ne contient point α, elle doit résulter du second système en y faisant $\gamma = \beta$; c'est ce qui arrive en effet, puisque cette supposition la rend identique à la première équation de ce système : on écrira donc $dx(\beta$ au lieu de $dx(\gamma, \alpha$ dans les deux précédentes, et on en tirera pour l'intégrale de

$$p + q - x + \alpha = 0,$$

quand α est constant,

$$y = x + \beta,$$

$$z = \frac{x^2}{2} - \alpha x + \phi\beta;$$

celle de la proposée sera donc représentée par le système des trois

équations

$$y = x + \beta,$$

$$z = \frac{x^2}{2} - \alpha x + n,$$

$$x - \frac{dn}{d\alpha\,(\beta} = 0.$$

Reste à calculer l'équation qui doit terminer n. Pour cela, on prendra la valeur de p et de q pour en conclure celle de

$$\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\beta}\right] \text{ et de } \left[\frac{dq}{d\alpha\,(\beta}\right];$$

on trouvera, à cause que la troisième équation fait disparaître les termes de la valeur de p et de q dépendans de la variabilité de α,

$$p = x - \alpha + \frac{dn}{d\beta\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{dx\,(y} = x - \alpha - \frac{dn}{d\beta\,(\alpha},$$

$$q = \frac{dn}{d\beta\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{dy\,(x} = \frac{dn}{d\beta\,(\alpha},$$

$$\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\beta}\right] = -\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} - 1,$$

$$\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\beta}\right] = \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta};$$

substituant ces valeurs dans

$$H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\beta}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\beta}\right] = 0,$$

on aura en se rappelant que

$$H = x, \quad K + \sqrt{G} = p,$$

et en changeant les signes

$$(x - p)\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} + x = 0;$$

mais

$$x = \frac{dn}{d\alpha\,(\beta},$$

et

$$x - p = q + \alpha = \frac{d\,n}{d\,\beta\,(\alpha} + \alpha :$$

ainsi

$$\left(\frac{d\,n}{d\,\beta\,(\alpha} + \alpha\right)\frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\,\beta} + \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\beta} = 0,$$

pour avoir l'intégrale de cette dernière, il faudrait connaître celle de

$$(q + x)\,s + p = 0.$$

C'est donc à trouver la valeur générale de z, qui satisfait à cette équation où il n'entre que la seule dérivée du second ordre s, qu'est ramenée, par la méthode que nous venons d'exposer, l'intégration de l'équation donnée,

$$x\,r + (p + x)\,s + p\,t - x = 0.$$



toutes les particularités de leur construction ont été étudiées avec tant de soin et d'une manière si détaillée qu'il ne reste presque plus rien à desirer sur cet objet.

Il était indispensable, sans doute, d'apporter, dans les observations thermométriques, une grande précision; mais cela ne suffit pas pour conduire à une connaissance approfondie de la théorie de la chaleur. On pourrait, à la vérité, rapporter la marche de tous les phénomènes à une échelle arbitraire de température, et chercher des formules empiriques qui représentent exactement les observations ; mais on ne peut espérer de découvrir les propriétés les plus générales, ou, si l'on veut, les lois les plus simples de la chaleur, que lorsqu'on aura confronté les thermomètres construits avec des substances prises dans les trois états dont la matière est susceptible, et lorsqu'on aura déterminé les rapports qui existent entre les indications de ces instrumens et les quantités de chaleur ajoutées ou soustraites pour produire des variations déterminées de température.

Quoique ce sujet de recherche ait dû naturellement se présenter à l'esprit de presque tous les physiciens, on doit convenir qu'il n'a pas encore été traité avec tout le soin et tout le développement que son importance exige. Les essais de Deluc et de Crawford n'embrassent qu'une étendue trop limitée de l'échelle thermométrique, pour qu'il soit permis d'en déduire aucune conséquence générale. C'est, au reste, un défaut commun à presque tous les travaux relatifs à la théorie de la chaleur, et qui est devenu la source de tant d'inductions erronées. On conçoit facilement, en effet, que des phénomènes assujettis à des lois fort différentes peuvent avoir une marche en apparence identique dans un certain intervalle de température, et que, si l'on se contente de les observer entre les limites où leur divergence est presque insensible, on sera porté à attribuer leurs faibles écarts aux erreurs d'observation, et l'on manquera des données nécessaires pour remonter à leur véritable cause. Plusieurs fois, dans le cours de ce Mémoire, on aura l'occasion de sentir la justesse de cette réflexion.

M. Dalton, en considérant la même question sous un point de vue beaucoup plus élevé, a essayé d'établir des lois générales applicables à la mesure de toutes les températures. Ces lois, il faut en convenir, forment un ensemble imposant par leur régularité et leur simplicité. Malheureusement cet habile physicien s'est trop empressé de généraliser des aperçus fort ingénieux, il est vrai, mais qui ne reposaient que sur des évaluations incertaines. Aussi n'est-il presque aucune de ses assertions qui ne se trouve contredite par les résultats des recherches que nous allons faire connaître.

Ces recherches ont pour objet principal les lois du refroidissement des corps plongés dans un fluide élastique d'une nature, d'une densité et d'une température quelconques. Avant de nous livrer à l'étude de cette classe de phénomènes, il était indispensable de suppléer d'abord au défaut complet de notions exactes sur la mesure des températures élevées. C'est donc par l'examen de cette question accessoire, mais d'un haut intérêt par elle-même, que nous avons commencé notre travail : c'est aussi par-là que nous en commencerons l'exposition.

Ce Mémoire se composera ainsi de deux parties très-distinctes : l'une aura pour objet tout ce qui est relatif à la mesure des températures ; la deuxième comprendra les lois générales du refroidissement.

PREMIÈRE PARTIE.

DE LA MESURE DES TEMPÉRATURES.

S'IL existait un corps dont les dilatations fussent soumises à une loi assez régulière et assez simple pour que les additions successives de quantités égales de chaleur y produisissent constamment un même accroissement de volume, ce corps réunirait toutes les qualités que les physiciens ont crues nécessaires et suffisantes pour constituer un thermomètre parfait.

Un tel instrument pourrait cependant ne pas offrir tous les avantages qu'il paraît d'abord promettre. En effet, s'il arrivait, par exemple, que le calorique spécifique de toutes les autres substances, rapporté à ce thermomètre, fût variable et inégalement variable dans chacune d'elles, il est bien évident que l'on ne pourrait rien conclure, *à priori*, des indications de cet instrument relativement aux quantités de chaleur acquises ou perdues par une variation déterminée de température.

On voit donc que le premier pas à faire dans cette recherche doit être de constater si les capacités d'un grand nombre de corps, prises avec une même échelle, varient de la même manière ; et si les dilatations des substances qui diffèrent le plus par leur nature sont soumises aux mêmes lois. Cette dernière comparaison, par laquelle nous commencerons, étant susceptible d'une plus grande exactitude que la première, nous lui avons donné beaucoup plus d'extension, et nous croyons n'avoir rien négligé de ce qui pouvait contribuer à l'exactitude des résultats.

De la Dilatation des Gaz.

Quand on a simplement pour but d'établir une comparaison générale entre les dilatations de tous les corps, la substance thermométrique à laquelle on rapporte toutes les mesures, peut être prise d'une manière arbitraire. La construction plus facile et l'usage plus commode du thermomètre à mercure, nous ont déterminés à l'employer dans presque toutes nos expériences.

La comparaison de ce thermomètre avec le thermomètre à air, a été faite depuis long-temps par M. Gay-Lussac, entre les limites de la glace fondante et de l'eau bouillante. Il résulte des expériences de ce célèbre physicien, que la marche des deux instrumens ne présente pas de divergence sensible dans cet intervalle de température.

M. Dalton pense, au contraire, que le thermomètre à mercure serait en avance de 1° environ sur le thermomètre à air, vers le milieu de l'échelle où l'écart devrait évidemment être le plus grand, puisque les deux instrumens s'accordent à 0° et à 100°.

On voit, d'après cela, que s'il existe réellement une différence entre les dilatabilités du mercure et de l'air, elle doit être très-faible entre les limites de la glace fondante et de l'eau bouillante.

Nous avons d'abord poursuivi cette comparaison dans les températures inférieures. Par une première expérience faite à — 20°, nous avons encore trouvé une identité parfaite entre les indications des deux instrumens; et, par un grand nombre d'observations faites de — 30° à — 36°, nous avons remarqué des différences légères, mais tantôt positives et tantôt négatives, de manière que la moyenne de toutes les mesures prises simultanément sur les deux instrumens, se trouve être la même pour chacun d'eux (1). Ainsi, dans une étendue de plus

1) Afin de faire juger du peu d'écart des déterminations partielles, nous rapportons

de 130°, l'écart des deux échelles que nous comparons est assez faible pour se confondre avec les erreurs d'observation.

Rien n'est plus facile que ce genre d'expériences, tant qu'on ne va pas au-delà du point d'ébullition de l'eau ; mais lorsqu'on veut suivre cet examen dans les températures élevées, on rencontre d'assez grandes difficultés qui obligent d'avoir recours à des procédés plus longs et plus compliqués. Ceux que nous avons adoptés et que nous allons décrire, nous paraissent comporter toute la précision dont les recherches de cette nature sont susceptibles.

Notre appareil se compose d'une cuve rectangulaire de cuivre rouge, de sept décimètres de longueur, d'un décimètre de largeur et d'un décimètre de profondeur. Cette cuve porte sur l'une de ses petites faces latérales deux douilles, dont l'une sert à introduire dans une situation horizontale un thermomètre à mercure, et dont l'autre retient l'extrémité ouverte d'un tube qu'on place horizontalement à la même hauteur que le thermomètre. Ce tube est parfaitement desséché et contient de l'air pareillement sec.

La cuve repose sur un fourneau construit de manière qu'il puisse chauffer également de toutes parts : on la remplit d'une huile fixe, qui peut, comme on le sait, supporter une température de plus de trois cents degrés sans bouillir.

---

ici quelques - unes de celles qui ont été prises entre — 36° et — 30°.

THERMOMÈTRE à mercure.	THERMOMÈTRE À AIR CORRIGÉ de la dilatation du verre.
— 36°,29 ;	— 36°,18 ;
— 34, 72 ;	— 34, 84 ;
— 33, 31 ;	— 33, 40 ;
— 32, 27 ;	— 32, 13 ;
— 31, 63 ;	— 31, 54 ;
— 31, 26 ;	— 31, 04 ;
— 30, 46 ;	— 30, 59 ;
— 29, 68 ;	— 29, 64.
Moyenne. = — 32°,452.	Moyenne = — 32°,420.

Le tube qui renferme l'air, se termine, du côté de la douille, par un tube court et d'un diamètre très-petit qui sort en partie de la cuve. La quantité d'air contenue dans la portion extérieure de ce tube, et qui ne participe pas à l'échauffement du reste, est tout-à-fait négligeable : nous nous sommes assurés qu'elle n'excédait jamais un demi-millième de la masse totale, et nous avions d'ailleurs la précaution de l'échauffer pendant chaque expérience, afin d'atténuer l'erreur qui pouvait en résulter.

La cuve est fermée par un couvercle percé de plusieurs ouvertures : les unes sont traversées par des thermomètres verticaux qui servent à indiquer si les différentes parties de la masse liquide sont à la même température ; les autres portent des tiges armées de volans, dont la rotation produit dans le liquide une agitation assez vive qui a pour objet d'établir l'uniformité de température.

Voici maintenant la marche qu'on a suivie dans chaque expérience : on échauffait d'abord la cuve jusqu'à une température peu distante de celle qu'on voulait atteindre, et l'on fermait alors toutes les ouvertures du fourneau. La chaleur tendant à se mettre en équilibre dans tout l'appareil, la température de l'huile s'élevait encore de quelques degrés, et parvenait bientôt à son *maximum*, où elle devenait quelque temps stationnaire, et par conséquent facile à mesurer avec précision. Elle était alors indiquée par le thermomètre horizontal, qu'on avait soin d'enfoncer assez avant dans l'huile pour que toute la colonne de mercure y plongeât : au même instant, on fermait au chalumeau la pointe effilée de la partie extérieure du tube à air, et l'on notait la hauteur barométrique. Cela fait, on retirait le tube et on le transportait dans une chambre séparée dont la température était à-peu-près invariable ; on le plaçait verticalement, et de manière que sa pointe plongeât dans un bain de mercure parfaitement sec. En cassant cette pointe, le mercure remontait jusqu'à ce que l'équilibre fût établi avec la pression extérieure : on laissait alors le tube dans cette situation pendant un temps suffisant pour qu'il prît exactement la tempé-

rature de la chambre, qu'indiquait un thermomètre très-sensible suspendu à peu de distance. Lorsque cet équilibre de température s'était produit, on mesurait, à l'aide d'une échelle verticale armée d'un vernier, la hauteur de la colonne soulevée dans le tube. On observait en même temps la hauteur barométrique, et la différence de ces hauteurs faisait connaître l'élasticité de l'air froid : on retirait alors le tube en prenant toutes les précautions nécessaires pour y retenir le mercure dont se composait la colonne qui avait été soulevée. On pesait le tube et le mercure qu'il contenait; on pesait ensuite ce même tube successivement vide et entièrement plein de mercure; retranchant du résultat de cette dernière pesée ceux des deux premières, on avait les poids de deux volumes de mercure égaux, l'un au volume de l'air chaud, l'autre au volume de l'air froid; et de ces poids on concluait les volumes eux-mêmes, qu'on ramenait ensuite à ce qu'ils auraient été sous la même pression, puisqu'on connaissait l'élasticité de l'air froid qui avait été mesurée comme nous l'avons indiqué, et celle de l'air chaud, qui était égale à la pression de l'atmosphère à l'instant où l'on avait fermé le tube (1).

Afin de faire mieux apprécier le degré de confiance que méritent

---

(1) Toutes les expériences faites d'après la méthode que nous venons d'indiquer, ont été calculées au moyen de la formule suivante :

Appelant P le poids de la masse de mercure dont le volume est égal à celui de l'air chaud; T la température de cet air, comptée sur le thermomètre à mercure; H son élasticité; P', T', H' les quantités analogues pour l'air froid. Désignant par V ce que devient un volume d'air, égal à l'unité, à la température 0°, et qui se dilate sans changer de pression jusqu'à la température $T°$; et représentant enfin par d la dilatation moyenne du verre entre $T'°$ et $T°$, on a :

$$V = \frac{PH\,[1 + d\,(T - T')]\,(1 + 0{,}00375\,T')}{P'H'};$$

on conclut facilement de là qu'un thermomètre à air, dont les indications seraient corrigées de la dilatation du verre, marquerait pour une température T du thermomètre à mercure un nombre de degrés égal à

$$\frac{P\,H}{P'\,H'}\,[1 + d\,(T - T')]\,(266{,}67 + T') - 266{,}67.$$

les résultats auxquels nous avons été conduits, il ne sera pas inutile de donner quelques détails relatifs aux précautions que nous avons prises dans chaque expérience.

L'un des plus grands obstacles que l'on rencontre dans ce genre de recherches, provient de la difficulté d'établir une uniformité parfaite de température dans une grande masse liquide de deux ou trois cents degrés plus chaude que l'air ambiant. Cette condition peut être rigoureusement satisfaite, lorsque la température à laquelle on opère est, par exemple, celle de l'ébullition du liquide qu'on emploie; car alors cette température est nécessairement fixe : mais dans tout autre cas, la marche plus ou moins rapide de l'échauffement ou du refroidissement des divers points de la masse, s'oppose à ce que l'uniformité nécessaire ait lieu. Cependant nous croyons que la disposition de notre appareil remédie en grande partie à ce genre d'inconvénient; et cela tient, d'une part, à ce que la cuve de cuivre étant enfoncée dans le fourneau, compose avec lui une masse assez considérable qui se refroidit lentement, sur-tout lorsqu'elle est près de son *maximum* de température; et, en second lieu, à ce que le liquide étant continuellement agité, la chaleur doit s'y distribuer plus également. Au reste, pour lever tous les doutes que l'on aurait pu conserver à cet égard, nous avons plongé dans cette cuve deux thermomètres situés horizontalement à la même hauteur; et, en opérant d'ailleurs comme dans nos expériences ordinaires, nous n'avons jamais observé plus de deux ou trois dixièmes de degré d'écart entre les deux instrumens.

Du reste, en supposant même que tous les points de la couche liquide qui environne le tube à air, ne fussent pas exactement à la même température, l'erreur ne serait pas aussi grande qu'on pourrait le croire d'abord; car, par suite de la disposition de l'appareil, la boule du thermomètre répond à-peu-près au milieu de la longueur du tube, et, par conséquent, cet instrument doit, dans tous les cas, indiquer une température peu éloignée de la moyenne de celles des différentes parties du tube. C'est même cette considération qui nous

a déterminés à prendre un tube cylindrique, de préférence à tout autre vase de forme différente. Nous rappellerons de plus, à l'occasion de ce que nous venons de dire, la nécessité où l'on est, pour connaître les véritables indications du thermomètre, de l'enfoncer dans le liquide de manière que la colonne de mercure y plonge entièrement. Cette précaution qui paraît minutieuse dans les basses températures, ne doit pas être omise lorsqu'il s'agit de températures élevées ; car alors la colonne de mercure contenue dans la tige, éprouve un accroissement de longueur très-sensible. Ainsi nous avons remarqué qu'à la température de 300°, par exemple, il y avait souvent plus de 12° de différence entre les indications d'un même thermomètre, selon que l'instrument tout entier, ou la boule seulement, plongeait dans le liquide. On pourrait, à la vérité, d'après la connaissance de la dilatation du mercure, estimer l'erreur que l'on commet en ne plongeant le thermomètre qu'en partie; mais l'impossibilité de juger exactement la température de la tige, entraînant dans des erreurs d'autant plus graves que la correction porte sur des nombres plus grands, il nous a toujours paru préférable de placer les thermomètres horizontalement.

Quoique les expériences exécutées selon le procédé que nous venons de décrire, aient toujours offert un accord remarquable dans leurs résultats, nous avons cherché à les vérifier d'une autre manière.

Dans ces nouvelles expériences, on s'est servi d'un tube à air d'une beaucoup plus grande capacité que dans les premières, et placé de la même manière; seulement le tube très-étroit qui lui était soudé se recourbait à sa sortie de la cuve, et se prolongeait verticalement dans une longueur d'environ cinq décimètres; on chauffait en prenant toutes les précautions dont nous avons parlé; et lorsqu'on avait atteint la température stationnaire, et qu'on avait noté la hauteur barométrique, on portait sous l'extrémité inférieure du tube vertical une capsule pleine de mercure bien sec; on laissait refroidir le tube jusqu'à ce que l'huile eût à-peu-près repris la température de l'air : pendant toute la durée de ce refroidissement, le mercure montait dans le tube

vertical, et ne s'arrêtait que lorsque l'air intérieur était complétement refroidi. La force élastique de cet air était alors égale à la pression extérieure de l'atmosphère, diminuée de la hauteur de la colonne soulevée; celle de l'air chaud était égale à la hauteur barométrique observée à l'instant où la température était stationnaire; on pouvait donc calculer, au moyen de la loi de Mariotte, quelle aurait été la dilatation de l'air s'il eût toujours conservé la même élasticité.

Pour rendre ce procédé complétement exact, il a fallu d'abord tenir compte de la dépression capillaire que le mercure éprouve dans le tube très-étroit où il s'élève; cette dépression avait été mesurée d'avance, et l'on avait eu soin de faire choix d'un tube assez bien calibré pour qu'elle ne variât pas sensiblement.

En second lieu, le volume de l'air ne restait pas exactement le même; la portion comprise dans le tube vertical rentrait en partie dans le grand tube, à mesure que la colonne de mercure s'élevait, et cette portion d'air ne changeait pas sensiblement de température. Nous avons dû calculer l'influence de ces deux causes, et faire subir à nos observations la correction qui y était relative. Cette correction, qui dépend du rapport de la capacité du grand tube à celle du petit, se déduit d'ailleurs d'un calcul trop simple, pour qu'il soit nécessaire de l'indiquer (1).

Non-seulement les expériences faites d'après ce nouveau procédé ont confirmé tous les résultats que le premier nous avait fournis, mais elles nous ont encore appris que la loi de Mariotte se vérifie à toutes les températures, en sorte que les changemens d'élasticité que la chaleur pro-

(1) Nous nous bornerons encore à rapporter la formule qui a servi à calculer ces nouvelles expériences.

H y représente la hauteur du baromètre extérieur qui sert à mesurer la force élastique de l'air chaud; T la température de cet air, indiquée par le thermomètre à mercure; T' celle de l'air froid; H' la hauteur de la colonne soulevée après le refroidissement, cette hauteur étant corrigée de la dépression capillaire; A la hauteur totale du tube vertical; r le rapport entre la capacité de ce tube et celle du grand tube horizontal; d la dilatation moyenne du verre entre T'° et T°; V désigne encore ce que devient un volume d'air egal à

duit dans un gaz dont le volume reste constant, sont assujettis aux mêmes lois que les changemens de volume de ce fluide, quand sa pression ne varie pas.

Nous allons maintenant rapporter les déterminations moyennes déduites d'un très-grand nombre d'expériences faites par chacune des deux méthodes. Ces déterminations se trouvent rassemblées dans le tableau suivant, qui comprend l'échelle complète du mercure depuis sa congellation jusqu'à son ébullition, c'est-à-dire, un intervalle d'environ quatre cents degrés.

TABLEAU n.° 1.

TEMPÉRATURES indiquées par le thermomètre à mercure.	VOLUMES CORRESPONDANS d'une même masse d'air.	TEMPÉRATURES indiquées par un thermomètre à air et corrigées de la dilatation du verre.
— 36°.	0,8650.	— 36°.
0°.	1,0000.	0°.
100°.	1,3750.	100°.
150°.	1,5576.	148°,70.
200°.	1,7389.	197°,05.
250°.	1,9189.	245°,05.
300°.	2,0976.	292°,70.
Ébullition du mercure 360°.	2,3125.	350°,00.

Les nombres contenus dans la seconde et la troisième colonne, ont été

---

l'unité à la température 0°; et se dilatant, sans changer de pression, jusqu'à la température $T°$: on a

$$V = \frac{H\{1 + D(T - T')\}\{1 + 0{,}00375 . T'\}}{(H - H')\left(1 + r.\frac{A - H'}{A}\right) - rH};$$

on en conclut aussi qu'à la température $T°$ du thermomètre à mercure, le thermomètre à air, corrigé de la dilatation du verre, indiquerait un nombre de degrés égal à

$$\frac{H\{1 + D(T - T')\}\{266{,}67 + T'\}}{(H - H')\left(1 + r.\frac{A - H'}{A}\right) - rH} - 266{,}67.$$

été corrigés de la dilatation du verre, que nous ferons bientôt connaître (1).

Il existe une très-grande discordance entre les nombres indiqués par divers physiciens, pour le point d'ébullition du mercure sur sa propre échelle. Cela vient en partie du soin plus ou moins grand que chaque observateur a mis dans la construction de ses instrumens, et sur-tout de l'inexactitude de la correction qu'on est obligé de faire pour la partie de la tige qui n'est pas plongée dans le liquide. Le moyen dont nous avons fait usage et qui nous a fourni le résultat rapporté dans le tableau précédent, dispense de cette correction. Au lieu de mesurer immédiatement l'augmentation de volume d'une masse constante de matière, comme on le fait dans les thermomètres ordinaires, nous avons déterminé la perte de poids qu'éprouve une masse de mercure capable de remplir un vase de verre à 0°, lorsque ce vase est complétement submergé dans le mercure bouillant. Connaissant d'ailleurs la dilatation apparente du mercure dans le verre pour les 100 premiers degrés, on peut, par un calcul très-simple, trouver la température correspondante sur le thermomètre à mercure dont la tige serait à la même température que la boule (2). Pour empêcher le liquide contenu dans le vase d'entrer en ébullition, on avait eu la précaution de le terminer par un tube vertical très-étroit, de 6 centimètres de longueur. La colonne liquide qu'il contenait ne faisait pas la dix-millième partie de la masse totale; mais par la pression qu'elle exerçait dans l'intérieur du vase, elle s'opposait com-

---

(1) La crainte de donner à ce Mémoire une trop grande étendue ne nous permet pas d'entrer dans les détails relatifs à chaque expérience particulière. Nous nous contenterons donc, dans l'exposition de notre travail, de faire connaître les résultats définitifs, en supprimant les déterminations partielles et les calculs intermédiaires qui y conduisent.

(2) Soit P le poids du mercure qui remplit le vase à 0°; p le poids de la portion de ce liquide qui sort du vase quand on le porte de 0° à $t°$; on a

$$t = \frac{6480 . p}{P - p}.$$

plétement à la formation des vapeurs. Il est presque inutile de dire qu'on avait pris toutes les précautions nécessaires pour expulser complétement la moindre trace d'air ou d'humidité.

La température correspondante du thermomètre à air a été calculée par un moyen analogue à celui que nous avons constamment employé dans nos expériences sur la dilatation des gaz. Le nombre rapporté dans le tableau précédent, est la moyenne de quatre résultats qui ne diffèrent pas entre eux d'un degré.

D'après la belle observation de M. Gay-Lussac, que tous les fluides élastiques se dilatent précisément de la même quantité entre 0° et 100°, il était bien probable que la même uniformité s'observerait dans les températures élevées, et que les nombres rapportés précédemment pour l'air conviendraient à tous les gaz; cependant, pour ne rien laisser d'incertain dans une matière aussi importante, nous avons fait une expérience sur le gaz hydrogène, qui, comme l'on sait, diffère le plus des autres dans quelques-unes de ses propriétés physiques. Le résultat s'est trouvé compris entre les extrêmes de ceux que nous avions obtenus pour l'air (1). On peut donc établir en principe que tous les gaz se dilatent absolument de la même manière et de la même quantité pour des changemens égaux de température.

Les déterminations que nous venons de rapporter suffiraient, s'il ne s'agissait que de connaître le volume d'un gaz à une température quelconque comptée sur le thermomètre à mercure, ou réciproquement; mais le but que nous nous étions proposé, de comparer la marche des dilatations du mercure et de l'air, ne se trouve pas encore complétement atteint. En effet, tous les thermomètres à liquides n'indiquent que la différence d'expansion du fluide et du vase qui le contient: or, ces différences ne peuvent être proportionnelles aux expansions

---

(1) Le volume de l'hydrogène était 1 à *zéro*, nous l'avons trouvé égal à 2,1003, à la température de 300° sur le thermomètre à mercure. Les valeurs extrêmes du volume occupé par l'air dans les mêmes circonstances sont 2,0948 et 2,1027.

absolues de ce liquide, que dans le seul cas où les accroissemens de volume des deux corps suivraient identiquement la même loi. Si, par exemple, la matière de l'enveloppe se dilatait suivant une loi moins rapide que le fluide qu'elle renferme, il est évident que la marche du thermomètre paraîtrait croissante, lors même que celle du liquide serait uniforme. Dans le cas contraire, il s'établirait une compensation partielle et inégale, qui troublerait encore l'exactitude des comparaisons. Il était donc indispensable de chercher à connaître les variations que subissent, dans les températures élevées, les dilatations absolues de l'un des deux corps qui entrent dans la construction du thermomètre à mercure.

Lorsque l'on considère toutes les difficultés inhérentes à la mesure de l'expansion des solides, quand on ne dépasse même pas le terme de l'eau bouillante, on est effrayé des obstacles bien autrement multipliés qui accompagneraient indubitablement cette même détermination dans les hautes températures. Après un mûr examen de toutes les ressources expérimentales que l'on pouvait espérer de trouver, l'incertitude d'un succès tel que nous le desirions, et l'énorme complication des appareils qu'il aurait fallu employer, nous ont déterminés pour la mesure directe des dilatations absolues du mercure. C'est l'objet du chapitre suivant.

De la Dilatation absolue du Mercure.

La connaissance de la dilatation absolue du mercure est devenue d'une nécessité indispensable, depuis que l'on a senti la possibilité de mesurer exactement les hauteurs par le moyen du baromètre. Cette donnée n'est pas moins utile dans un grand nombre d'expériences physiques : aussi est-il bien peu de déterminations de ce genre qui aient donné lieu à tant de recherches; mais, malgré toutes les précautions que les observateurs ont dû prendre pour apporter, dans cette mesure, l'exactitude dont ils sentaient toute l'importance, on trouve peu d'exemples d'une plus grande discordance dans les résultats : en voici quelques-uns.

Dilatations absolues du Mercure.

De 0° à 100°.

Dalton,.	$\frac{1}{50}$;	Deluc, ...	$\frac{1}{56}$;
Lord Charles Cavendish,	$\frac{1}{53}$;	Le général Roy, ...	$\frac{1}{59}$;
Shuckburgh, ...	$\frac{1}{54}$;	Lalande et Delisle, ..	$\frac{1}{66}$;
Laplace et Lavoisier,. (1)	$\frac{1}{54}$;	Dom. Casbois, ...	$\frac{1}{67}$.
Haellstroëm, ...	$\frac{1}{55}$;		

La plupart de ces déterminations ont été calculées, en ajoutant à la dilatation apparente du mercure dans le verre, la dilatation propre de ce dernier; et comme on a été pendant long-temps dans une grande incertitude sur cette dilatation, les résultats précédens devaient nécessairement s'en ressentir.

Deluc, Casbois et le général Roy, ont essayé de mesurer directement la dilatation réelle du mercure par l'alongement de la colonne barométrique, produit par une variation connue de température. Les résultats obtenus par ce procédé sont beaucoup plus inexacts encore. Il serait facile d'en assigner les raisons, en discutant les méthodes employées par chacun des physiciens que nous venons de citer; mais pour cela il faudrait entrer dans des détails qui pourraient devenir fastidieux : d'ailleurs, les travaux que nous venons de rappeler ne sont relatifs qu'à des

(1) Cette détermination dont on fait usage en France depuis plusieurs années, est généralement attribuée à MM. Lavoisier et Laplace. Nous nous étions bien aperçus qu'elle ne s'accorde point avec le nombre que Lavoisier rapporte dans ses Mémoires, *tom. I, pag. 310*, pour la dilatation apparente du mercure dans le verre; mais nous avions pensé qu'elle résultait d'un travail postérieur et inédit. Depuis la rédaction de notre Mémoire, nous avons appris que ces illustres savans n'ont point entrepris de nouvelles expériences sur cet objet, mais qu'il s'est glissé une erreur dans le calcul des observations; de sorte que le véritable coëfficient déduit de leurs mesures est $\frac{1}{55,22}$, au lieu de $\frac{1}{54,12}$; il s'éloigne alors très-peu de celui que nous rapportons à la fin de ce chapitre. Cet accord est une nouvelle garantie de l'exactitude de nos observations.

températures au-dessous de 100° ; et c'est précisément au-delà de ce terme que nous avions besoin de connaître la dilatation réelle du mercure. Il devenait donc nécessaire d'avoir recours à de nouveaux procédés : celui que nous allons faire connaître nous paraît susceptible de toute la précision desirable.

Il est fondé sur ce principe incontestable d'hydrostatique, que lorsque deux masses liquides communiquent entre elles par un tube latéral, les hauteurs verticales de leurs surfaces sont précisément en raison inverse de leurs densités. Si donc on pouvait parvenir à mesurer exactement les hauteurs de deux colonnes de mercure contenues dans les branches d'un siphon de verre renversé, en en supposant l'une entourée de glace fondante, par exemple, tandis que l'autre serait portée à une température quelconque bien connue, on en déduirait facilement les dilatations cherchées.

En effet, si h et h' désignent les hauteurs verticales de ces deux colonnes produisant des pressions égales aux températures t et t', on devra avoir, en appelant d et d' les densités correspondantes,

$$h d = h' d' :$$

or, d et d' sont en raison inverse des volumes v et v' qu'occuperait une même masse du liquide, en la portant successivement aux températures t et t' ; on a donc

$$v' = v \frac{h'}{h} ;$$

d'où l'on tire enfin, pour le coefficient moyen de la dilatation entre t° et t'° :

$$\frac{h' - h}{h\,(t' - t)} .$$

Tout se réduit donc à la mesure exacte des températures et des hauteurs des colonnes ; et il est presque inutile de dire qu'on obtient ainsi la dilatation absolue du liquide, puisque la forme des vases n'influant en rien sur la pression des liquides qui y sont contenus, leurs dilatations ne peuvent pas l'affecter davantage.

Boyle est le premier qui ait indiqué l'usage qu'on pourrait faire de ce principe pour comparer entre elles les densités des liquides. Plusieurs physiciens ont pensé depuis à l'appliquer à la mesure des dilatations, et il est probable que cette méthode très-rigoureuse serait d'un emploi facile dans les basses températures ; mais quand on veut la mettre en pratique pour les températures de 300° et au-delà, elle ne laisse pas d'être très-laborieuse.

Afin de rendre plus claire l'explication de l'appareil que nous avons employé, nous en avons dessiné une perspective *(planc. 1.re, fig. 1)*, dans laquelle on ne voit que les pièces essentielles, le reste pouvant être facilement suppléé.

Le tube recourbé qui contient le mercure se compose de deux branches verticales AB et $A'B'$, communiquant ensemble par un tube horizontal BB' exactement dressé, et conservant, dans toute son étendue, la même épaisseur de verre et le même diamètre intérieur. On avait eu soin de constater par un essai préliminaire, que la pression se transmettait sans aucun obstacle d'une des colonnes à l'autre par le tube horizontal, et que le frottement du mercure contre ses parois n'empêchait pas le niveau de se rétablir lorsque l'équilibre avait été troublé.

Chacune des deux branches verticales est formée, ainsi qu'on le voit sur la figure, par l'assemblage de deux tubes de calibres très-différens soudés l'un à l'autre. En donnant au tube inférieur un petit diamètre, on diminue beaucoup la masse totale du mercure; et en le terminant par un tube plus large, on se garantit de l'erreur que pourrait occasionner l'inégalité de l'effet capillaire due à la différence de température des deux colonnes.

Le tube horizontal repose, dans toute sa longueur, sur une forte barre de fer MN, en forme de T, qui est elle-même appuyée solidement par ses trois pieds sur une table de bois très-épaisse. La face supérieure de la barre a été dressée avec soin, et porte deux niveaux à angle droit qu'on règle à l'aide des vis situées aux quatre angles de la table.

Près de chacun des tubes verticaux s'élève un montant de fer portant

un anneau à clavette qui enveloppe le tube, et le retient ainsi dans une position fixe. (Afin de ne pas surcharger la figure, on s'est contenté d'indiquer le montant situé à côté du tube AB. Il est terminé, comme on le voit, par une petite pièce arquée de fer dont la pointe R est destinée à servir de repère).

Le tube recourbé étant assujetti dans toutes ses parties, il restait à disposer l'appareil de manière à communiquer à chacune des deux colonnes la température convenable. Rien n'était plus simple pour la colonne AB, qu'on voulait entretenir à *zéro*. On y est parvenu en l'entourant d'un large cylindre de fer-blanc mastiqué dans le bas autour de la barre de fer, et qu'on remplissait de glace pilée jusqu'à la hauteur du mercure dans le tube. On avait seulement ménagé dans ce cylindre une petite fenêtre F, qu'on ouvrait pour dégager un peu de glace, afin d'apercevoir le sommet de la colonne de mercure au moment de l'observation. Des thermomètres très-exacts plongés, à différentes époques dans cette colonne, nous ont prouvé qu'elle était toujours rigoureusement à *zéro*.

La partie de l'appareil qui devait contenir le bain destiné à échauffer la colonne $A'B'$ présentait, au contraire, de grandes difficultés d'exécution. Une boîte dont le fond aurait fait corps avec les parois ne pouvait pas être employée, puisqu'il n'y aurait pas eu de moyen d'y introduire la colonne $A'B'$. Il fallait de plus que la barre MN pût traverser cette boîte, et qu'on pût remplir avec un lut imperméable les petits intervalles que la barre laisserait entre elle et les parois échancrées. Pour satisfaire à toutes ces conditions, nous avons fait construire un cylindre de cuivre rouge, dont le fond peut s'enlever à volonté : il est terminé, dans le haut, par un rebord sur lequel s'applique le couvercle; il porte en outre vers sa base deux appendices opposés RR', SS', ayant tous deux la forme de demi-cylindres horizontaux, dans l'intérieur desquels passe la barre MN. On prendra une idée exacte de la forme de l'auge dans la figure 2, qui en représente la section faite par un plan vertical parallèle à la direction des appendices. La forme du fond est

indiquée à part dans la figure 3 ; il se réunit au corps de la boîte, à l'aide d'un grand nombre de vis d'acier serrées avec la plus grande force. Une semblable pression ne suffisant pas encore pour empêcher l'écoulement du liquide, on a interposé entre les surfaces contiguës des lames minces de carton.

L'avantage des appendices est de permettre de luter à une assez grande distance du feu. Malgré cette précaution, le lut s'échauffe encore, et finirait par se détacher si l'on ne prenait pas le soin de le refroidir par un courant d'eau.

La boîte ainsi construite a été établie solidement dans un fourneau en la maintenant de toutes parts avec des traverses de fer. C'est ce fourneau qui, dans la perspective, est censé coupé par le milieu, afin qu'on puisse voir les pièces situées dans son intérieur.

Nous terminerons cette description préliminaire en disant que le cylindre de cuivre est rempli d'une huile fixe qu'on échauffe peu à peu jusqu'à la température à laquelle on veut faire l'observation. On ferme ensuite toutes les issues du fourneau. La chaleur se répand alors uniformément dans toute la masse, et la température demeure stationnaire pendant un temps suffisant pour prendre toutes les mesures dont on a besoin ; mais pour que rien n'altère l'exactitude de ces déterminations, il est nécessaire que la boîte de cuivre soit toujours entièrement pleine d'huile, et que la colonne chaude de mercure se termine à une hauteur très-petite au-dessus du couvercle. On remplissait aisément cette seconde condition en ajoutant ou en retirant, à l'aide d'une pipette, une quantité convenable de mercure, quelques instans avant l'observation. Quant à la première, elle se trouve satisfaite en remplissant l'auge à froid, et en ménageant, dans le haut du vase, un tuyau LQ, dont l'orifice Q est de niveau avec la face inférieure du couvercle, et par lequel l'huile peut s'écouler en se dilatant.

Passons maintenant à la mesure des températures et des hauteurs des colonnes.

Le bain d'huile contient deux thermomètres, l'un à mercure, analogue

logue à celui que nous avons déjà eu occasion de décrire, et dans lequel la température se calcule en comparant le poids du mercure sorti de l'instrument, à celui qui le remplit à *zéro*. Telle est la sensibilité de celui dont nous nous sommes servis, qu'un échauffement d'un degré faisait sortir environ un décigramme de mercure. Son réservoir *DE*, par-tout de même diamètre, et s'enfonçant dans le bain à la même profondeur que la colonne *A'B'*, indiquait exactement la température moyenne de cette colonne.

Le second est un thermomètre à air dont le réservoir cylindrique *D'E'*, placé comme celui du précédent, est terminé par un tube très-fin *E'G'H*, recourbé horizontalement en dehors du fourneau. Ce tube se réunit en *H'* à un tube vertical *H'K'* un peu plus large et bien calibré, qui plonge dans un bain de mercure *K'*. Pour régler ce thermomètre, on a d'abord chauffé le bain presque à l'ébullition de l'huile, en laissant ouverte l'extrémité *K'* du tube. Lorsque tout l'air excédant a été chassé par la dilatation, on a plongé l'orifice *K'* dans une cuvette pleine de mercure sec. Par le refroidissement de l'huile, le mercure est peu à peu remonté dans le tube. C'est en mesurant au *maximum* de température la hauteur de cette colonne et celle du baromètre, que l'on connaissait l'augmentation d'élasticité de l'air, d'où, par un calcul très-simple, on déduisait la température du thermomètre à air. Il est à peine nécessaire d'ajouter que le tube avait été desséché avec soin, et que, dans chaque mesure, on faisait la correction relative à la dépression capillaire.

Les indications de ce thermomètre n'ajoutent rien à la précision de celles qui sont fournies par le thermomètre à mercure; mais nous n'avons pas laissé échapper cette occasion de comparer encore la marche de ces deux instrumens. Les résultats déduits de cette comparaison sont entrés dans la détermination des moyennes inscrites dans le tableau n.° 1.

Il nous reste maintenant à faire connaître l'espèce de micromètre dont nous nous sommes servis pour mesurer la hauteur des colonnes. Cet instrument (*fig. 4*) se compose d'une règle épaisse de cuivre *AB*, le long de laquelle glisse à frottement doux une pièce de même métal *MNPRS*,

portant, à ses deux extrémités *R* et *S*, deux collets dans lesquels tourne une lunette micrométrique *OO'*, munie, à son foyer, d'un fil horizontal. A la lunette est suspendu un niveau très-sensible à bulle d'air, dont le tube gradué sert à régler l'axe optique. Cette pièce de cuivre *MNPRS*, est susceptible de deux mouvemens, l'un rapide en desserrant la vis latérale *C*; l'autre très-doux, produit par la vis de rappel *D*. Tout l'instrument tourne enfin autour d'un axe vertical qui repose sur un plan triangulaire de cuivre épais, muni d'une vis à chacun de ses sommets.

La construction de cet instrument permet, comme on le voit, de mesurer la différence de hauteur de deux points qui ne sont pas situés dans la même verticale. Il faut, pour cela, après avoir dirigé la lunette sur l'un des points, faire tourner l'axe pour la ramener dans l'azimuth de l'autre point. On la descend alors, ou on la monte d'une quantité convenable qui se mesure sur une échelle tracée sur la face opposée de la règle *AB*, à l'aide d'un vernier mu par la pièce *MNPRS*. L'emploi d'une vis micrométrique aurait peut-être été préférable, sans la promptitude d'exécution qu'exigeaient nos expériences. Du reste, le vernier nous permettait d'apprécier les cinquantièmes de millimètre, et cette précision a paru suffisante.

Pour donner à cet instrument toute l'exactitude desirable, il fallait que les plus petites différences de niveau fussent appréciables, et que, dans le passage d'une observation à l'autre, la lunette conservât son horizontalité, ou du moins qu'on pût tenir compte de ses dérangemens. On a satisfait à la première condition en donnant un grossissement suffisant à la lunette ; quant à la seconde, le soin particulier avec lequel le micromètre a été fait, et la solidité de l'appui sur lequel il reposait et qui était indépendant du reste de l'appareil, auraient pu la faire regarder comme remplie : néanmoins, on avait mesuré d'avance, pour la distance à laquelle pointe la lunette, à quelle différence de hauteur répondait un changement d'inclinaison égal à une partie du niveau. Cette donnée suffisait pour corriger les observations dans lesquelles le niveau se dérangeait.

Les procédés dont on se sert pour régler de semblables instrumens, sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les rappeler. On sait que, par des retournemens convenables de la lunette, tant sur elle-même que sur ses collets, et par des observations dans les différens azimuths où on peut la placer en tournant l'axe de l'instrument, on parvient à rendre cet axe vertical, et l'axe optique de la lunette horizontal.

Revenons maintenant à l'appareil de la dilatation : le micromètre était placé sur un plan de marbre *T*, porté par un massif de maçonnerie. L'axe de l'instrument se trouvait à égale distance des centres des tubes *AB* et *A'B'*, et du repère *R*; on pouvait donc mesurer immédiatement les excès de hauteur de ce point au-dessus des sommets des colonnes de mercure, c'est-à-dire, les hauteurs $r - h$ et $r - h'$, en appelant *r* la hauteur absolue du repère. Afin de nous assurer que la réfraction au travers des tubes ne produisait aucune déviation dans le sens vertical, nous avons placé, au centre de chacun d'eux, des mires sur lesquelles nous avons dirigé la lunette de notre micromètre, et nous avons reconnu que la coïncidence du fil n'était nullement troublée, soit qu'on enlevât le tube, soit qu'on le retournât.

Il ne restait plus alors qu'à connaître *r*. Or, cette hauteur restait constante dans toutes les expériences, puisque la tige qui porte le repère était toujours entourée de glace. On s'est servi, pour la mesurer, d'une règle verticale graduée, dont le *zéro* était placé sur la barre de fer *MN*. Cette règle, construite pour un autre usage, avec un très-grand soin, a donné les hauteurs dont il s'agit, à un dixième de millimètre près : mais les hauteurs mesurées au-dessus de la barre *MN*, sont trop grandes; car *h*, *h'* et *r* doivent être comptées à partir de l'axe du tube horizontal; il faut donc retrancher de la hauteur indiquée par la règle, la moitié de l'épaisseur totale du tube.

Pour faire juger du degré d'exactitude que comportent ces diverses opérations, rapportons une des mesures prises à 100°. La hauteur du repère au-dessus de l'axe du tube horizontal était de $0^m,58250$; les hau-

teurs $r-h$, $r-h'$, étaient respectivement de $0^{m},03855$, et de $0^{m},02875$; ainsi $h=0.54395$ et $h'-h=0.^{m}00980$; et par suite le coefficient moyen de la dilatation absolue du mercure entre 0° et $100=\frac{1}{5550}$. On voit par-là qu'une erreur de deux ou trois dixièmes de millimètre sur la mesure de r ne produirait qu'une incertitude de deux ou trois unités sur le dénominateur de la fraction précédente. Ainsi, par un effet particulier de la disposition de notre appareil, celle des mesures qui comporte le moins de précision ne pouvait jamais occasionner que des erreurs tout-à-fait négligeables ; la barre de fer se serait même un peu dérangée par l'action du feu (quoiqu'on eût soin de la rendre toujours horizontale par ses niveaux), que cet effet n'aurait eu encore que très-peu d'influence sur le résultat final.

C'est par-là que notre appareil l'emporte de beaucoup en exactitude et en simplicité sur les appareils de dilatation des solides. En effet, dans ceux-ci, le moindre dérangement du point fixe, dans la durée très-longue d'une expérience, n'affecte pas seulement la longueur totale de la règle ; la dilatation elle-même s'en trouve augmentée ou diminuée, ce qui entraîne dans les erreurs les plus graves. On voit, au contraire, que lors même que, dans nos expériences, les hauteurs h et h' se trouveraient affectées par l'effet dont nous parlons, la différence $h-h'$ qui mesure la dilatation ne le serait pas ; car il serait trop invraisemblable de supposer que l'instrument se dérange pendant le temps très-court qui s'écoule entre les observations successives de la colonne chaude et de la colonne froide.

Nous avons rassemblé, dans le tableau suivant, les résultats moyens d'un grand nombre d'observations faites à l'aide du procédé que nous venons de décrire. La première colonne contient les températures telles qu'on les déduit de la dilatation de l'air; la seconde renferme les dilatations moyennes absolues du mercure entre la glace fondante et chacune des températures indiquées dans la première colonne; enfin, la troisième comprend les températures qu'on obtiendrait en supposant

uniforme la dilatation du mercure, ou, en d'autres termes, celles qu'indiquerait un thermomètre construit avec ce liquide, en le renfermant dans un vase dont l'expansion suivrait la même loi que la sienne.

TABLEAU n.° 2.

TEMPÉRATURES déduites de la dilatation de l'air.	DILATATIONS MOYENNES absolues du mercure.	TEMPÉRATURES INDIQUÉES par la dilatation du mercure supposée uniforme.
0° ;	0 ;	0° ;
100 ;	$\frac{1}{5550}$;	100 ;
200 ;	$\frac{1}{5525}$;	204.61 ;
300 ;	$\frac{1}{5300}$;	314.15.

De la Dilatation des Solides.

Si l'on rapproche les résultats du tableau précédent de ceux que nous avons donnés dans le tableau n.° 1, on apercevra facilement que les doutes que nous avions élevés sur la marche du thermomètre à mercure n'étaient pas sans fondement, et que les lois de dilatation de l'enveloppe de cet instrument et du liquide qui y est renfermé sont très-notablement différentes, quand on considère un grand intervalle de température. Lorsque le thermomètre à air marque 300° sur son échelle, le mercure pris isolément indiquerait 314°,15 sur la sienne, tandis que le thermomètre ordinaire en accuse seulement 307,64.

Les déterminations précédentes offrent d'autant plus d'intérêt, qu'elles peuvent conduire à une connaissance très-exacte de la dilatation absolue de plusieurs corps solides. Il suffira, en effet, pour y parvenir, de mesurer la différence d'expansion du mercure et de chacun de ces corps.

C'est d'abord ce qu'on peut pratiquer très-aisément sur le verre : car la différence dont il s'agit n'est autre chose que la dilatation apparente

du mercure dans un vase fait avec cette substance. Quoique cette dilatation ait déjà été l'objet d'un assez grand nombre de déterminations, nous avons cru nécessaire de la prendre nous-mêmes, en y apportant tous les soins qu'exigent les expériences de ce genre. Nous nous sommes servis pour cela d'un tube d'environ 6 décimètres de longueur, et pouvant contenir à-peu-près 700 grammes de mercure. Ce tube était fermé à l'une de ses extrémités, et se terminait à l'autre par un tube capillaire dont la capacité n'était qu'une fraction entièrement négligeable de celle du tube principal.

Tout l'appareil étant rempli de mercure et rigoureusement purgé d'air et d'humidité par des ébullitions réitérées, nous avons déterminé le poids du mercure qui en sortait, en le portant de la température de la glace fondante à celle de l'eau bouillante. On appréciera toute l'exactitude de ce procédé, si l'on remarque que la portion de la masse qui ne participe pas à l'échauffement est insensible, et que la position horizontale du tube permet de faire, à la température de l'ébullition de l'eau, la correction dépendant de la pression barométrique.

Cette expérience, répétée cinq fois sur des masses différentes, nous a donné, pour la dilatation cherchée, des valeurs presque identiques dont la moyenne est rapportée ci-dessous. Nous n'avons trouvé aucune différence sensible entre les effets observés dans les tubes de verre ordinaire tirés de diverses fabriques, quels que fussent d'ailleurs leur calibre intérieur et l'épaisseur de leurs parois.

Les valeurs de la dilatation apparente à 200° et à 300°, inscrites dans le même tableau, ont été déduites de la comparaison précédemment faite des échelles du thermomètre à mercure et du thermomètre à air.

TABLEAU n.° 3.

TEMPÉRATURES déduites de la dilatation de l'air.	DILATATIONS MOYENNES apparentes du mercure dans le verre.	DILATATIONS absolues du verre, en volume.	TEMPÉRATURES déduites de la dilatation du verre, supposée uniforme.
100° ;	$\frac{1}{6480}$;	$\frac{1}{38700}$;	100° ;
200 ;	$\frac{1}{6378}$;	$\frac{1}{36300}$;	213.2 ;
300 ;	$\frac{1}{6318}$;	$\frac{1}{3290}$;	352.9.

Les deux premières colonnes de ce tableau n'ont besoin d'aucune explication. On y remarque une dilatation apparente du mercure dans le verre, entre 0° et 100°, un peu moindre que celle de MM. Lavoisier et Laplace, qui l'ont trouvée de $\frac{1}{6459}$. Nous nous attendions à une différence dans le sens où elle a lieu ; car, dans l'ouvrage même où cette dernière détermination est rapportée, les auteurs ont eu soin de prévenir qu'ils la croyaient trop forte, parce qu'ils n'avaient pas fait bouillir le mercure dans le vase dont ils s'étaient servis. La dilatation absolue du mercure qu'ils en avaient déduite devait donc être trop forte aussi, et c'est ce que confirme le résultat inscrit dans le tableau n.° 2. La 3.ᵉ colonne comprend les dilatations du verre obtenues par le moyen indiqué plus haut. Cette dilatation est croissante; mais on lui trouve entre 0° et 100° la valeur que MM. Lavoisier et Laplace lui ont reconnue par des mesures directes. Enfin, la dernière colonne contient les indications correspondantes d'un thermomètre formé d'une simple lame de verre. On voit, par l'écart qui a déjà lieu à 300°, combien la dilatation du verre s'éloigne d'être uniforme.

Le même procédé paraîtrait devoir servir pour la mesure de l'expansion du fer, en renfermant le mercure dans un vase de ce métal ; des essais de ce genre ne nous ayant pas complétement réussi, nous avons eu recours au moyen suivant. Dans un tube de verre de 18 milli-

mètres de diamètre et de 6 décimètres de longueur, et fermé par une de ses extrémités, nous avons introduit une baguette cylindrique de fer doux qui se trouvait contenue dans l'axe du tube par quatre petites traverses d'une longueur presque égale à son diamètre. Après avoir soudé, à l'extrémité de ce tube, un autre tube capillaire, nous l'avons rempli entièrement de mercure que l'on a fait bouillir pendant un temps suffisant pour chasser complétement l'air et l'humidité. En l'exposant ensuite à diverses températures et déterminant les poids de mercure qui en sortent, il est aisé d'en déduire la dilatation du fer ; car le volume sorti représente évidemment la somme des dilatations du mercure et du métal diminuée de la dilatation du verre. Pour faire le calcul, il est nécessaire de connaître les volumes de ces trois corps à la température de la glace fondante : or, celui du fer s'obtient en divisant son poids par sa densité prise à *zéro*. On déduit de la même manière le volume du verre du poids du mercure qui le remplit à la même température : enfin celui du mercure est évidemment la différence des deux premiers.

Le procédé que nous venons d'indiquer peut s'appliquer à d'autres métaux, en prenant seulement la précaution d'en oxider la surface pour empêcher l'action dissolvante du mercure. On conçoit d'ailleurs que la couche d'oxide qui se forme ainsi est d'une épaisseur si petite qu'elle ne peut rien changer au résultat. Ce moyen nous a très-bien réussi pour le cuivre ; et nous nous serions certainement décidés à l'essayer sur d'autres métaux, si le desir de vérifier nos résultats ne nous avait pas déterminés à tenter l'emploi d'un procédé différent de celui que nous venons de décrire.

On sait que la grande complication des appareils qui servent à la mesure de la dilatation des corps solides, provient de la nécessité où l'on est de rendre une partie du système absolument fixe ; mais quand on connaît avec précision l'expansion d'un de ces corps, on peut en déduire très-exactement celles de tous les autres, en étudiant la marche d'un pyromètre formé par l'assemblage de deux règles qu'il suffit alors de

vérité, dissiper toute incertitude en répétant les mêmes expériences, les règles étant placées horizontalement, ou bien encore en renversant la position du système; mais Deluc, n'ayant point fait attention à l'inconvénient que nous venons de signaler, n'a tenté aucun moyen de vérification.

Les appareils à compensation, tel que celui de Deluc, n'offrant aucun avantage réel dans les basses températures, et devenant d'un emploi très-difficile dans les températures élevées, nous avons dû adopter une disposition différente, que nous allons faire connaître.

Les règles dont nous nous sommes servis ont toutes 12 décimètres de longueur, 25 millimètres de largeur, et 4 millimètres d'épaisseur. Lorsqu'on veut comparer les dilatabilités de deux d'entre elles, on les réunit d'une manière invariable par une de leurs extrémités, au moyen d'une traverse en fer, sur laquelle elles sont fixées par de fortes vis. Chaque règle porte à son autre extrémité une tige de laiton qui s'élève d'abord verticalement, et se recourbe ensuite horizontalement. Les branches horizontales de ces deux montans sont munies, l'une d'une échelle divisée en cinquièmes de millimètre, et l'autre d'un vernier qui marque les vingtièmes de division de l'échelle, ce qui permet d'apprécier les centièmes de millimètre, ou les cent vingt millièmes de la longueur des règles. Cette fraction répondait, dans la plupart de nos expériences, à un changement de température d'environ un degré; et comme il est impossible de se tromper d'une partie du vernier, pour peu que l'on soit exercé à lire les divisions, on voit que chaque détermination partielle, même dans les plus hautes températures, n'a jamais dû être affectée d'une erreur d'un degré. Cette précision nous a paru suffisante dans le genre de recherches qui nous occupe. D'ailleurs, pour donner plus de sensibilité à notre appareil, il aurait fallu en augmenter les dimensions; et alors la difficulté d'établir une température uniforme aurait pu jeter plus d'incertitude sur les véritables dilatations.

Les deux règles reposent sur quatre rouleaux de cuivre assujettis à une barre de fer. Tout le système est placé dans une auge en cuivre

coup de substances; mais du moins, les résultats que nous présentons ont été déduits de déterminations partielles assez nombreuses pour qu'il ne nous reste aucun doute sur leur exactitude.

Dans une première série de mesures, nous avons combiné une règle de platine avec une règle de cuivre. La dilatation de ce dernier corps nous étant déjà connue pour tous les degrés du thermomètre à mercure, les observations du pyromètre nous ont fourni le moyen de calculer avec une grande précision celle du platine, tant dans les basses températures que dans les températures élevées. Dans une seconde série d'expériences, nous avons associé à la règle de cuivre une règle de verre de même longueur. Ce système, composé de deux corps dont les dilatations nous étaient connues, nous offrait le moyen de vérifier les déterminations que nous avions déduites de notre premier procédé ; aussi n'avons-nous rien négligé de ce qui pouvait concourir à l'exactitude de cette comparaison : mais nous avons été long-temps arrêtés par une difficulté que l'on ne rencontre pas lorsqu'on n'opère que sur des métaux. Les règles devant être maintenues dans une position invariable l'une à l'égard de l'autre, on ne peut y parvenir que par le moyen de vis : or tout le monde sait qu'il est impossible de serrer avec force une plaque métallique épaisse contre le verre sans le faire éclater, quelque soin qu'on ait pris pour dresser les surfaces de contact. Nous avons employé d'abord pour corps intermédiaire une feuille de papier que l'on avait portée préalablement à une température de 300°, en ayant soin de la comprimer fortement dans un étau. Malgré cette précaution, la règle de verre ne paraissait pas assez solidement fixée après l'expérience pour ne laisser aucun soupçon d'erreur. Nous avons alors substitué au papier des lames très-minces d'argent fin ; pour cette fois, l'immobilité de la règle et de son prolongement a été complète, et les données fournies par l'observation de ce nouveau pyromètre, ont pleinement confirmé nos premières mesures relatives à l'expansion du verre et du cuivre.

Nous avons rassemblé dans le tableau suivant, les résultats conclus de ces diverses recherches. On y trouve les dilatations moyennes du

fer, du cuivre et du platine, prises d'abord entre 0° et 100°, et ensuite entre 0° et 300°. Nous n'avons rapporté aucune détermination intermédiaire, parce que le seul objet que nous ayons pour le moment en vue est d'assigner le sens dans lequel les différentes échelles thermométriques s'écartent les unes des autres. Mais afin de mettre les résultats plus en évidence, nous avons joint à chaque dilatation la température qui s'en déduit en supposant l'expansion du corps uniforme. Ces températures sont celles qu'indiqueraient des thermomètres construits avec chacun de ces corps.

TABLEAU n.° 4.

TEMPÉRATURES déduites de la dilatation de l'air.	DILATATIONS moyennes absolues du fer.	TEMPÉRATURES qui seraient indiquées par un thermomètre formé d'une règle de fer.	DILATATIONS moyennes absolues du cuivre.	TEMPÉRATURES qui seraient indiquées par un thermomètre construit avec une règle de cuivre.	DILATATIONS moyennes absolues du platine.	TEMPÉRATURES qu'indiquerait un thermomètre formé d'une règle de platine.
100° ;	$\frac{1}{28200}$;	100° ;	$\frac{1}{19400}$;	100° ;	$\frac{1}{37700}$;	100° ;
300.	$\frac{1}{22700}$.	372.6.	$\frac{1}{17700}$.	328.8.	$\frac{1}{36300}$.	311.6.

Ces résultats, rapprochés de ceux que nous avons déjà obtenus pour le verre, prouvent, contre l'opinion généralement reçue, que la dilatabilité des solides rapportée au thermomètre à air est croissante, et qu'elle l'est inégalement dans chacun d'eux.

Nous croyons avoir atteint, dans ce qui précède, le plus haut degré d'exactitude que comportent des mesures aussi délicates ; et c'est ce dont on peut d'ailleurs s'assurer, en comparant les nombres que nous donnons, pour les cent premiers degrés, avec ceux qu'ont obtenus MM. Lavoisier et Laplace. Nous n'ajouterons qu'une seule observation : dans les mesures directes de dilatation des solides, l'incertitude se trouve triplée en passant de l'expansion linéaire à l'expansion en volume. Nos déterminations donnant immédiatement cette dernière, l'erreur commise ne s'y trouve pas multipliée.

Du Calorique spécifique des Solides à diverses températures.

D'après les résultats des recherches précédentes, on voit qu'en rapportant la marche d'une série de phénomènes quelconques à un thermomètre pris successivement parmi les gaz, les liquides ou les solides, même les plus réfractaires, chaque espèce d'instrument conduirait à une loi particulière. Il ne serait donc pas indifférent de choisir tel ou tel thermomètre pour parvenir à la loi la plus simple, ou, si l'on veut, pour représenter les phénomènes par des mesures qui aient les relations les plus directes avec eux. Mais, pour se déterminer à cet égard, il faut encore savoir comment varient les capacités de tous les corps dans chacune des échelles thermométriques que nous avons fait connaître.

Depuis l'époque où Black établit la notion des capacités, plusieurs physiciens se sont efforcés de perfectionner les méthodes expérimentales propres à faire connaître cet élément important de la théorie de la chaleur, et d'appliquer ces méthodes à un grand nombre de substances. Les travaux de Wilke, de Crawford, de Meyer, et sur-tout de MM. Laplace et Lavoisier, sont, comme l'on sait, les plus remarquables de tous ceux qui ont été publiés sur cette matière. Deluc et Crawford, supposant un thermomètre idéal dans lequel les capacités seraient constantes, comparèrent ses indications avec celles du thermomètre à mercure, pour juger de l'exactitude de celui-ci. Presque toutes leurs expériences se réduisent à des mélanges de liquides dont la température n'a jamais dépassé celle de l'eau bouillante. On voit qu'en renversant la question, cela revient à chercher si les capacités de ces liquides restent constantes lorsqu'on mesure les températures par le thermomètre à mercure. Les résultats de ces deux physiciens sont différens : d'après le premier, il y aurait une légère variation dans la capacité de l'eau, dans l'intervalle des cent premiers degrés ; le second admet, au contraire, que les capacités sont constantes. Cette discordance même prouve

qu'entre les limites où les expériences ont été faites, la variation de capacité des corps, si elle existe, doit être très-faible ; mais de pareils essais sont beaucoup trop bornés pour permettre d'en conclure avec Crawford que le même principe s'étend à toutes les températures.

M. Dalton, qui a abordé cette question dans l'ingénieux ouvrage que nous avons déjà cité, prétend que la capacité d'une même masse de matière ne reste pas constante, par la raison qu'une partie de la chaleur est employée à produire la dilatation ; mais qu'elle resterait invariable si l'on considérait un même volume.

Cette assertion de M. Dalton n'est fondée sur aucune expérience directe, et peut être considérée comme une simple conjecture qui se lie avec ses autres idées relatives à la mesure des températures, et sur lesquelles nous reviendrons bientôt, en discutant les principes qui servent de base à toute sa théorie.

Toutefois nous reproduirons ici le même argument que pour les dilatations ; c'est qu'on ne peut espérer de résoudre le problème qui nous occupe, qu'en embrassant une partie de l'échelle thermométrique beaucoup plus considérable que celle qu'on a prise jusqu'à présent. Aussi les expériences que nous allons rapporter ont-elles toutes été faites dans un intervalle de 300, et même de 350°.

La saison dans laquelle nous avons été obligés de nous livrer à cette partie de nos recherches, ne nous permettant pas d'employer convenablement la fusion de la glace, nous avons constamment fait usage de la méthode des mélanges, mais avec toutes les précautions convenables pour en assurer l'exactitude.

Les corps dont nous avons déterminé les capacités devaient nécessairement être choisis parmi les métaux les plus difficiles à fondre. L'homogénéité et la conductibilité plus parfaite de ces substances, les rendaient plus propres qu'aucune autre au but que nous nous proposions (1).

---

(1) Afin d'augmenter l'étendue de la surface des corps sur lesquels on opérait, on leur a donné la forme d'anneaux très-aplatis. Leur poids était d'un à trois kilogrammes.

L'une des plus grandes difficultés que présente ce genre d'expériences, c'est l'évaluation exacte des températures. Nous avons employé, dans tous les cas, l'eau bouillante pour avoir la capacité au-dessous de ce terme ; et, pour l'obtenir dans les températures supérieures, quand la nature des corps permettait de les laisser plongés dans le mercure bouillant, nous nous sommes servis de ce second terme, aussi fixe que le premier, et qui avait été déterminé avec le plus grand soin, comme nous l'avons dit précédemment.

Mais lorsque la substance était attaquable par le mercure, nous l'échauffions dans un bain d'huile qui, par la disposition même de notre appareil, pouvait conserver une température stationnaire pendant un quart d'heure environ.

Enfin, pour éviter l'erreur qu'aurait pu occasionner l'inégale température des différens points de la masse, on brassait continuellement le liquide au moment du *maximum ;* et, par un thermomètre à volume constant, on avait exactement la température moyenne, qui devait être aussi celle du corps. Les huiles fixes acquérant, comme on sait, une très-grande fluidité lorsqu'elles sont très-chaudes, la couche qui reste attachée aux corps que l'on y a plongés est extrêmement mince : toutefois nous n'avons pas négligé de tenir compte de la chaleur provenant de cette addition de matière, quoique, dans la plupart des cas, la correction n'ait porté que sur de bien petites quantités (1).

Lorsque le corps soumis à l'expérience avait été porté à une certaine température mesurée par l'un des moyens que nous venons d'indiquer, on le plongeait aussi rapidement que possible dans une grande masse d'eau, et l'on observait le réchauffement de ce liquide quand l'équilibre s'était établi. C'est dans la mesure de ce réchauffement qu'il faut

(1) Cette correction se déduisait du poids d'huile entraîné par l'anneau : pour le connaître, il nous a fallu, dans chaque cas, faire une expérience préalable dans laquelle nous déterminions l'augmentation de poids de l'anneau à sa sortie du bain d'huile. A 300°, cette augmentation n'a jamais excédé 3 à 4 décigrammes.

apporter

apporter la plus grande précision pour pouvoir compter sur les résultats obtenus par ce procédé. Nous avons toujours employé une masse d'eau telle, que la variation de température n'allât jamais au-delà de 5 à 6 degrés centigrades; mais on se servait, pour la déterminer, d'un thermomètre dont les divisions répondaient à des intervalles de température assez petits pour qu'on pût évaluer exactement les centièmes de degré. L'eau était contenue dans un vase de fer-blanc très-mince, isolé sur un support à trois pointes. Ce vase participait, dans chaque cas, à l'échauffement ; mais comme son poids et sa chaleur spécifique étaient exactement connus, on pouvait, dans tous les calculs, tenir compte de l'effet qu'il produisait.

Dans la plupart des expériences, on refroidissait d'avance l'eau d'un nombre de degrés tel, qu'après l'immersion du corps elle se trouvât à la température de l'air environnant ; dans d'autres cas, le réchauffement commençait à partir de cette dernière température. La première méthode nous a généralement paru plus exacte et n'exige aucune correction. En effet, l'eau, immédiatement après que le corps y est plongé, acquérant une température très-peu différente de celle qui a lieu quand l'équilibre est établi, l'air extérieur ne doit exercer qu'une influence inappréciable. Dans la seconde méthode, au contraire, il est nécessaire de tenir compte de la perte de chaleur que la masse éprouve à raison de l'excès de la température et de la durée de l'expérience. Cette correction pouvait être déterminée avec une précision suffisante par une observation subséquente sur le refroidissement de l'eau qui avait été employée. Du reste, la masse des corps sur lesquels nous avons opéré, les circonstances variées dans lesquelles chaque détermination a été prise, et la précision reconnue du thermomètre dont nous nous sommes servis, tout nous paraît avoir concouru à l'exactitude des résultats que nous allons rapporter.

La grande capacité du fer (relativement aux autres métaux), et la possibilité de le plonger dans le mercure bouillant, nous ont décidé à commencer sur cette substance les comparaisons que nous nous pro-

posions de faire. Les déterminations suivantes sont déduites d'un grand nombre de mesures qui ne présentent que de très-faibles discordances :

Capacité moyenne du fer de 0° à 100° = 0.1098 (1);
———— de 0 à 200 = 0.1150;
———— de 0 à 300 = 0.1218;
———— de 0 à 350 = 0.1255.

Le résultat indiqué par le sens dans lequel varient ces nombres se trouve vérifié dans le tableau suivant pour d'autres métaux ; on s'est borné à y insérer les mesures prises à 100° et à 300° :

	CAPACITÉS MOYENNES entre 0° et 100°.	CAPACITÉS MOYENNES entre 0° et 300°.
Mercure........	0.0330;	0.0350;
Zinc............	0.0927;	0.1015;
Antimoine.......	0.0507;	0.0549;
Argent..........	0.0557;	0.0611;
Cuivre..........	0.0949;	0.1013;
Platine.........	0.0335;	0.0355;
Verre...........	0.177;	0.0190.

Il en est donc des capacités des corps solides comme de leurs dilatabilités ; elles croissent avec les températures mesurées sur le thermomètre à air ; elles croîtraient même encore, contre l'opinion de Crawford, en employant le thermomètre à mercure. Si cette observation avait été faite sur des corps d'un volume invariable, il ne resterait aucun doute sur ses conséquences ; mais l'état gazeux est le seul qui permette de satisfaire à cette condition, et, dans ce cas, l'expérience présenterait des difficultés insurmontables. Toutefois, si la dila-

(1) La capacité de l'eau est prise pour unité.

tation des solides était uniforme, on ne pourrait point attribuer l'accroissement des capacités à la quantité de chaleur qui produit l'augmentation de volume ; car cette quantité restant alors proportionnelle aux températures, elle ne saurait affecter le rapport des capacités. Il n'en est pas de même dans le cas où les dilatabilités sont croissantes ; il est indubitable que, dans cette circonstance, les capacités prises à des hauteurs différentes dans l'échelle thermométrique doivent se ressentir de l'irrégularité de la loi de dilatation. Nous ne pouvons former aucune conjecture sur les effets dus à cette cause accidentelle ; mais ce qui tendrait à faire croire qu'ils ne sont pas négligeables, et que l'accroissement de capacité que nous avons observé en dépend, au moins en partie, c'est que les métaux dont l'expansion suit la loi la plus rapide sont en même temps ceux dont la capacité subit les plus grandes variations. Du reste, cette question ne peut être décidée que par des observations qui embrasseraient un intervalle de température plus grand encore que celui dans lequel nos expériences ont été faites ; nous espérons être bientôt en état d'éclaircir ce doute.

Nous avons fait voir, en parlant de la dilatation des solides, qu'en construisant des thermomètres avec les métaux les plus infusibles, et en les supposant réglés comme à l'ordinaire par les termes fixes de la glace fondante et de l'eau bouillante, les températures accusées par chacun de ces instrumens seraient très-différentes. La même discordance doit s'observer évidemment, d'après ce qui précède, lorsqu'on évalue les températures, comme plusieurs physiciens l'ont proposé, par les rapports des quantités de chaleur qu'un même corps abandonne en se refroidissant jusqu'à une température déterminée ; car cette évaluation est évidemment fondée sur la supposition que les capacités sont constantes, ou du moins qu'elles croissent de la même manière dans tous les corps. Or ces deux suppositions sont également fausses. Nous avons rassemblé, dans le tableau suivant, les températures qui se déduiraient de ce procédé en employant les substances inscrites dans le tableau

précédent. Il faut supposer qu'elles ont toutes été placées dans un même bain liquide, à 300° du thermomètre à air.

Fer........	=	332°,2 ;
Argent......	=	329, 3 ;
Zinc.......	=	328, 5 ;
Antimoine...	=	324, 8 ;
Verre.......	=	322, 1 ;
Cuivre......	=	320, 0 ;
Mercure.....	=	318, 2 ;
Platine......	=	317, 9.

Réflexions générales et Conclusion.

Maintenant que nous avons constaté par l'observation, entre des limites suffisamment distantes, la marche relative des phénomènes qui peuvent être employés à la mesure des températures, nous sommes en état de décider si l'échelle thermométrique proposée par M. Dalton, jouit réellement de tous les avantages qu'il lui attribue. En mesurant les températures sur cette échelle, on trouve selon ce physicien :

1.° Que le mercure et tous les autres liquides se dilatent proportionnellement aux carrés des températures, à partir du *maximum* de densité de chacun d'eux ;

2.° Que les gaz se dilatent en progression géométrique pour des accroissemens de température en progression arithmétique ;

3.° Que la capacité des corps reste constante sous le même volume;

4.° Enfin, que, pendant toute la durée du refroidissement des corps dans l'air, les températures décroissent en progression géométrique lorsque les temps suivent une progression arithmétique.

La manière dont M. Dalton a présenté le principe sur lequel repose la formation de son échelle, ne permet pas de le considérer autrement

que comme une hypothèse qui aurait l'avantage de lier un grand nombre de phénomènes par des relations très-simples. Cet avantage, s'il existait, serait assez important, sans doute, pour faire admettre une idée si féconde, lors même qu'elle ne serait point établie par des moyens rigoureux. Aussi ne chercherons-nous point à discuter la valeur des observations particulières qui paraissent avoir dirigé ce célèbre physicien, et nous bornerons-nous à examiner si les déterminations rapportées dans ce Mémoire s'accordent avec les lois dont il s'agit.

Dans le rapprochement que nous allons faire, nous considérerons, comme une échelle arbitraire, celle du thermomètre à air dont les degrés sont tous égaux à la centième partie de l'intervalle compris entre la glace fondante et l'eau bouillante; et sans nous embarrasser d'abord des relations qui peuvent exister entre les indications de cet instrument et les quantités de chaleur correspondantes, nous ne nous en servirons que comme d'une mesure commune pour passer d'une échelle à une autre.

Au lieu de rechercher si, en mesurant les températures sur le thermomètre de M. Dalton, les dilatations du mercure et de l'air suivraient réellement les lois qu'il indique, il sera plus simple de calculer les températures qui correspondraient, dans son échelle thermométrique, à des dilatations déterminées de chacune de ces deux substances, en partant de la supposition que les lois dont il s'agit sont exactes, et de comparer ensuite les résultats obtenus pour l'une et pour l'autre. Le tableau suivant montre la correspondance de plusieurs termes calculés de cette manière.

TEMPÉRATURES INDIQUÉES par un thermomètre à air, dont l'échelle est uniforme.	TEMPÉRATURES CORRESPONDANTES conclues de la dilatation du mercure, dans la supposition que cette dilatation est proportionnelle aux carrés des températures.	TEMPÉRATURES CORRESPONDANTES conclues de la dilatation réelle d'un fluide élastique, dans la supposition que cette dilatation se fait en progression géométrique, les températures croissant en progression arithmétique.
— 40° ;	— 114°,8 ;	— 52°,2 ;
0 ;	0 ;	0 ;
50 ;	57,4 ;	53,9 ;
100 ;	100 ;	100 ;
200 ;	169,1 ;	175,7 ;
300 ;	226,7 ;	236,8 ;
350.	251,1.	263,2.

En parcourant la 2.e et la 3.e colonne de ce tableau, on voit que les températures conclues des dilatations du mercure et de l'air sont bien éloignées de s'accorder, comme elles devraient le faire, si la théorie de M. Dalton était fondée. Toutefois, la divergence qu'elles présentent dans les degrés supérieurs ne paraît pas, à beaucoup près, aussi grande qu'elle l'est réellement. En effet, comme les échelles relatives au mercure et à l'air ont deux termes communs, savoir, ceux de la fusion de la glace et de l'ébullition de l'eau, l'erreur énorme qui se manifeste dans la partie inférieure n'a aucune influence sur la détermination des températures élevées. C'est donc comme si les deux échelles avaient des points de départ différens ; mais en les ramenant à une même origine, la discordance des premiers termes se ferait sentir dans tous les autres. Ainsi, lors même qu'on mesurerait les températures sur la nouvelle échelle de M. Dalton, les deux premières lois que nous venons de rapporter ne représenteraient nullement les phénomènes.

Maintenant, si l'on veut comprendre dans cette discussion la troisième loi relative aux capacités des corps pour la chaleur, on verra que

à une substance en particulier, elle ne pourrait point être appliquée à d'autres, puisque les capacités de tous les corps ne varient pas de la même manière.

En comparant entre elles toutes les échelles thermométriques, on peut pareillement s'assurer qu'il n'en existe aucune dans laquelle les dilatations de tous les corps se laissent exprimer par des lois simples. Ces lois varieraient d'ailleurs suivant l'échelle que l'on adopterait. Ainsi, en prenant pour type le thermomètre à air, les lois de dilatation de tous les corps seraient croissantes ; en choisissant le fer pour la substance thermométrique, tous les autres corps suivraient alors des lois de dilatation décroissantes ; enfin, si l'on admettait le thermomètre à mercure, corrigé de la complication que son enveloppe apporte à sa marche, le fer et le cuivre auraient une dilatabilité croissante, tandis que le platine et les gaz en auraient une continuellement décroissante.

Encore bien que, dans l'état où la question se trouve maintenant réduite, on ne puisse alléguer aucune raison péremptoire pour adopter exclusivement une de ces échelles, nous devons dire cependant que l'uniformité bien connue dans les principales propriétés physiques de tous les gaz, et sur-tout l'identité parfaite de leurs lois de dilatation, rendent très-vraisemblable que, dans cette classe de corps, les causes perturbatrices n'ont plus la même influence que dans les solides et les liquides ; et que, par conséquent, les changemens de volume produits par l'action de la chaleur y sont dans une dépendance plus immédiate de la force qui les produit. Il est donc très-probable que le plus grand nombre des phénomènes relatifs à la chaleur se présenteront sous une forme plus simple, en mesurant les températures sur le thermomètre à air. C'est du moins par ces considérations que nous avons été déterminés à employer constamment cette échelle dans les recherches qui font l'objet de la seconde partie de ce Mémoire : le succès que nous avons obtenu peut être donné comme un motif de plus en faveur de l'opinion que nous venons d'énoncer. Nous ne prétendons pas, au reste, qu'il

qu'il faille exclure les autres échelles dans toutes les circonstances. Il serait possible, par exemple, que certains phénomènes se présentassent d'une manière plus simple, en comptant les températures sur les échelles thermométriques déduites de la dilatation de chacun des corps qui feraient le sujet de l'observation ; c'est même ce qui nous a engagés à suivre avec tant de persévérance les comparaisons de toutes les échelles thermométriques.

SECONDE PARTIE.

DES LOIS DU REFROIDISSEMENT.

LES premières vues relatives aux lois de la communication de la chaleur se trouvent consignées dans les *Opuscules* de Newton (1). Ce grand physicien admet, *à priori,* qu'un corps échauffé, soumis à une cause constante de refroidissement telle que l'action d'un courant d'air uniforme, doit perdre, dans chaque instant, une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de sa température sur celle de l'air ambiant; et que, par conséquent, ces pertes de chaleur, dans des intervalles de temps égaux et successifs, doivent former une progression géométrique décroissante. Kraft, et après lui Richmann (2), ont essayé de vérifier cette loi par des expériences directes sur le refroidissement de masses liquides. Ces expériences, répétées depuis par plusieurs physiciens, prouvent en effet que, pour des différences de température qui n'excèdent pas 40 ou 50 degrés, la loi de la progression géométrique représente assez exactement la marche du refroidissement d'un corps.

Dans une dissertation peu connue, sur plusieurs points de la théorie de la chaleur, publiée en 1740, par conséquent plusieurs années avant l'époque où Kraft et Richmann ont fait connaître leurs recherches, Martine (3) avait déjà signalé l'inexactitude de la loi précédente, et avait cherché à lui en substituer une autre dans laquelle les pertes de chaleur croîtraient plus rapidement que dans la loi de Newton.

(1) *Neutoni Opuscula,* t. II, p. 423.
(2) *Nov. Com. Ac. Petrop.* t. I, p. 195.
(3) *Dissertations sur la chaleur, &c.* p. 72 et suiv.

Erxleben (1) prouva également, par des observations très-précises, que l'écart de la loi supposée augmente de plus en plus à mesure que l'on considère de plus grandes différences de température, et il en a conclu qu'on commettrait des erreurs graves, si l'on étendait cette loi fort au-delà des limites entre lesquelles elle a été vérifiée. Cette remarque très-juste d'Erxleben ne paraît pas avoir fixé l'attention des physiciens; car, dans toutes les recherches postérieures sur le même objet, on voit la loi de Newton présentée, non comme une approximation, mais comme une vérité rigoureuse et constatée.

Ainsi, M. Leslie (2), dans ses ingénieuses recherches sur la chaleur, a fait de cette loi la base de plusieurs déterminations qui, par cela même, se trouvent inexactes, ainsi que nous le prouverons par la suite.

Peu de temps après la publication des travaux de M. Leslie, M. Dalton fit connaître, dans son *Nouveau Traité de chimie philosophique*, une série d'expériences sur le refroidissement de corps portés à une température très-élevée. Les résultats de ces expériences montrent évidemment que la loi de Richmann n'est qu'approchée dans les basses températures, et qu'elle devient tout-à-fait inexacte dans les températures élevées. M. Dalton, au lieu de chercher à découvrir une autre loi fondée sur ses propres observations, essaya de justifier celle de Richmann, en substituant à l'échelle thermométrique ordinaire celle qu'il a cru pouvoir établir d'après les considérations que nous avons discutées dans la première partie de ce Mémoire. Mais, lors même que l'on aurait constaté l'exactitude des principes sur lesquels repose cette nouvelle échelle, on serait encore forcé de convenir qu'elle ne satisfait pas à la condition de rendre les pertes de chaleur d'un corps proportionnelles aux excès de sa température sur celle de l'air environnant, ou, en d'autres termes, qu'elle ne rétablit pas la loi de Richmann; car il faudrait pour cela que la loi

du refroidissement fût la même pour tous les corps, et nos expériences prouvent rigoureusement le contraire.

Les derniers travaux entrepris sur le sujet qui nous occupe sont ceux que Laroche a insérés dans son Mémoire relatif à quelques propriétés de la chaleur rayonnante. Il établit, entre autres propositions, que *la quantité de chaleur qu'un corps chaud cède dans un temps donné, par voie de rayonnement, à un corps froid situé à distance, croît, toutes choses égales d'ailleurs, suivant une progression plus rapide que l'excès de la température du premier sur celle du second.*

Cette proposition est, comme on le voit, pour le rayonnement l'équivalent de celle de M. Dalton pour le refroidissement total d'un corps dans l'air ; mais Laroche n'a présenté que des résultats isolés, et n'a pas cherché la loi dont ils dépendent. Nous verrons même par la suite que ces résultats sont compliqués par l'action de causes particulières dont il aurait fallu les dégager pour arriver à la loi du refroidissement dans le vide, qui, d'ailleurs, n'est pas la même que celle du rayonnement.

Les travaux des physiciens sur les lois du refroidissement se bornent donc jusqu'ici à avoir montré que la loi admise par Newton est suffisamment approchée, tant que l'on ne considère que de petits excès de température; mais qu'elle s'éloigne de plus en plus de la vérité, à mesure qu'on l'étend à des différences de plus en plus grandes : et si, dans l'exposé succinct de ces travaux, nous n'avons pas cité les recherches mathématiques de M. Fourier sur les lois de la distribution de la chaleur, c'est que toutes les applications de son analyse sont fondées sur la loi de Newton, admise comme une vérité d'observation, tandis que nos expériences ont uniquement pour objet de découvrir la loi qu'on doit substituer à celle-ci. Du reste, les conséquences très-remarquables auxquelles ce profond géomètre a été conduit, conserveront toute leur exactitude dans les circonstances et entre les limites où la loi de Newton se vérifie, et il suffira, pour les étendre aux autres cas, de les modifier conformément aux nouvelles lois que nous établirons.

Du Refroidissement en général.

On sait que lorsqu'un corps se refroidit dans le vide, sa chaleur se dissipe entièrement sous forme rayonnante, et que lorsqu'il est placé dans l'air ou dans tout autre fluide, son refroidissement devient alors plus rapide, parce que la perte occasionnée par le fluide s'ajoute à celle que produit le rayonnement. Il est donc indispensable de distinguer ces deux effets ; et, comme ils sont d'ailleurs assujettis, suivant toute apparence, à des lois différentes, il est nécessaire de les étudier isolément. C'est ce que nous allons faire en traitant successivement du refroidissement dans le vide et dans les fluides élastiques : mais comme la marche que nous avons suivie dans chacune de ces recherches est fondée sur les mêmes principes, il est convenable de les établir dès-à-présent.

Pour parvenir à connaître la *loi élémentaire* du refroidissement, c'est-à-dire, celle que suivrait un corps de dimensions assez petites, pour qu'on pût supposer à chaque instant tous ses points à la même température, c'eût été compliquer inutilement la question, et peut-être la rendre insoluble, que d'observer d'abord la marche du phénomène dans les solides, puisque l'on embrasserait alors un élément de plus, savoir, la distribution intérieure de la chaleur, qui est une fonction de la conductibilité. Étant ainsi obligés, par la nature du problème, d'avoir recours aux liquides, le thermomètre à mercure lui-même nous a paru l'instrument le plus approprié à ce genre d'expériences ; mais comme il est nécessaire, quand on veut étendre l'observation à des températures très-élevées, de donner au corps sur lequel on opère un volume assez considérable pour que le refroidissement n'en soit point tellement rapide qu'on ne puisse en suivre le progrès avec exactitude, il fallait, avant tout, examiner quelle influence peut avoir, sur la loi du refroidissement, la masse plus ou moins grande du liquide contenu dans le réservoir du thermomètre : il n'était pas moins important de rechercher si cette loi dépend de la nature du liquide, de la nature et de la forme du vase dans

lequel ce liquide est renfermé. Cette discussion préliminaire a été l'objet d'une série d'expériences que nous allons rapporter, après avoir exposé la méthode uniforme de calcul dont nous avons constamment fait usage pour rendre nos résultats plus faciles à comparer.

Supposons qu'on observe, à des intervalles de temps égaux entre eux, de minute en minute par exemple, les excès de températures d'un corps sur le milieu environnant, et que, pour les temps,

$$0 \ldots\ldots 1' \ldots\ldots 2' \ldots\ldots 3' \ldots\ldots \&c. \ldots t',$$

ces excès soient A, B, $C \ldots T$. Si la loi de la progression géométrique était exacte, on devrait avoir

$$B = Am . C = Am^2 \ldots T = Am^t;$$

m étant une fraction qui varierait d'un corps à un autre. Cette loi ne se vérifie jamais exactement, sur-tout quand les températures A, B, C sont élevées; mais on conçoit qu'on pourra toujours représenter un certain nombre de termes de la série précédente par une expression de la forme $Am^{\alpha t + \beta t^2}$, en déterminant convenablement les coëfficiens m, α, β; et, à l'aide de cette formule, on pourra calculer avec une très-grande approximation la valeur du temps t, correspondant à un excès de température quelconque T, pourvu que cet excès soit compris dans la portion de la série qui a servi à l'interpolation.

Cette même expression nous donne le moyen de déterminer la vîtesse de refroidissement correspondante à chaque excès de température, c'est-à-dire, le nombre de degrés dont la température du corps s'abaisserait dans une minute, en supposant la vîtesse du refroidissement uniforme pendant cette minute. En effet, on a pour cette vîtesse:

$$\frac{dT}{dt} = T . (\alpha + 2\beta t) \log. m.$$

Cette quantité doit toujours excéder la perte réelle de température pendant le même temps, puisque la vîtesse du refroidissement diminue pendant toute sa durée, quelque courte qu'elle soit.

Ce n'est pas, comme on le pense bien, pour corriger la petite différence dont nous venons de parler, que nous avons fait usage de ce procédé ; mais on sentira aisément que lorsqu'une série se trouvait ainsi divisée en plusieurs parties représentées chacune par des formules empiriques qui satisfaisaient le plus exactement possible aux nombres observés, les vîtesses de refroidissement, déduites de ces formules pour les différens excès de température, se trouvaient dégagées des incertitudes et des irrégularités que peuvent présenter des résultats isolés.

Revenons maintenant à la première comparaison dont nous parlions tout-à-l'heure, et pour cela examinons comment la vîtesse du refroidissement a varié dans les trois séries dont les résultats calculés sont renfermés dans le tableau suivant :

EXCÈS de température sur l'air.	VÎTESSE de refroidissement du thermomètre *A*. diam. = 2 cent.	VÎTESSE de refroidissement du thermomètre *B*. diam. = 4 cent.	VÎTESSE de refroidissement du thermomètre *C*. diam. = 7 cent.
100° ;	18°,92 ;	8°,97 ;	5°,00 ;
80 ;	14,00 ;	6,60 ;	3,67 ;
60 ;	9,58 ;	4,56 ;	2,52 ;
40 ;	5,93 ;	2,80 ;	1,56 ;
20.	2,75.	1,30.	0,73.

La première colonne contient les excès de la température des thermomètres sur celle de l'air environnant ; la seconde renferme les vîtesses correspondantes de refroidissement du thermomètre *A*, dont la boule a environ 2 centimètres de diamètre. Ces vîtesses ont été calculées par la méthode exposée plus haut, d'après les observations directes. La troisième et la quatrième colonne comprennent les vîtesses de refroidissement des thermomètres *B* et *C*, calculées de la même manière pour les excès de température indiqués dans la première colonne. La boule du thermomètre *B* a à-peu-près 4 centimètres de diamètre ; celle du thermomètre *C* en a 7.

Un simple coup-d'œil jeté sur ce premier tableau nous montre déjà l'inexactitude de la loi de Richmann; car on voit que les vîtesses de refroidissement croissent suivant une progression plus rapide que les excès de température. Maintenant, si l'on prend les rapports des nombres correspondans de la seconde et de la troisième colonne, on trouvera qu'ils ont varié ainsi qu'il suit, en commençant par les termes qui répondent aux plus grands excès de température :

2,11..... 2,12..... 2,10..... 2,12.,... 2,11.

Ces nombres, qui ne diffèrent que très-peu les uns des autres, et qui sont tantôt plus grands et tantôt plus petits, nous apprennent que la vîtesse du refroidissement varie, suivant la même loi, dans les thermomètres *A* et *B*. En comparant de la même manière les nombres contenus dans la seconde et la quatrième colonne, on trouvera pour leurs rapports :

3,78..... 3,81..... 3,80..... 3,80..... 3,77.

L'égalité presque parfaite de ces nombres nous montre que la loi du refroidissement est encore la même pour les thermomètres *A* et *C*; car les différences que présentent les nombres précédens doivent être attribuées aux erreurs inséparables des expériences, et ne répondent d'ailleurs qu'à des incertitudes d'un centième de degré sur les vîtesses.

On est donc en droit de conclure de ce qui précède, que la loi du refroidissement, observée sur un thermomètre à mercure, est indépendante de la grandeur de son réservoir, et qu'elle est par conséquent cette loi élémentaire du refroidissement que nous cherchons, ou, si l'on veut, la loi que suivrait le refroidissement d'un point matériel.

Nous n'avons pas examiné comment les vîtesses de refroidissement varient avec la grandeur des surfaces, à cause du peu de précision dont serait susceptible la mesure de la surface d'une boule de verre soufflée à l'extrémité d'un tube, et parce que cette recherche était étrangère à celle

celle qui nous occupe. Néanmoins, on voit par les mesures approchées que nous avons données des diamètres des boules, que les vîtesses de refroidissement sont à très-peu près dans le rapport que l'on observerait à l'égard de sphères de dimensions infiniment petites, c'est-à-dire, en raison inverse des diamètres.

Passons maintenant à l'examen de l'influence que pourrait avoir sur la loi du refroidissement la nature du liquide contenu dans le vase. Ici, la difficulté de construire des thermomètres avec des liquides autres que le mercure, difficulté qui tient aux incertitudes qui restent encore sur les lois de dilatation de ces corps, nous a déterminés à observer le refroidissement de ces liquides en les renfermant dans un même matras de verre, au centre duquel plongeait un thermomètre à mercure très-sensible. Nous avons même reconnu que la position du thermomètre était indifférente, et qu'à un instant donné, les températures de tous les points de la masse étaient sensiblement les mêmes; ce qui tient évidemment à ce que la conductibilité intérieure, qui, dans les liquides, est le résultat des courans qui s'y forment, peut être regardée comme à-peu-près parfaite, au moins pour des masses telles que celles sur lesquelles nous avons opéré.

Le premier des tableaux suivans contient les vîtesses comparées du refroidissement du mercure et de l'eau; le second renferme une comparaison semblable faite entre le mercure et l'alcool absolu; le troisième entre le mercure et l'acide sulfurique concentré.

EXCÈS de température du corps.	VÎTESSE de refroidissement du mercure.	VÎTESSE de refroidissement de l'eau.	RAPPORT entre ces vîtesses.
60° ;	3°,03 ;	1°,39 ;	0,458 ;
50 ;	2,47 ;	1,13 ;	0,452 ;
40 ;	1,89 ;	0,85 ;	0,450 ;
30.	1,36.	0,62.	0,456.

EXCÈS de température du corps.	VÎTESSE de refroidissement du mercure.	VÎTESSE de refroidissement de l'alcool absolu.	RAPPORT entre ces vîtesses.
40° ;	1°,89 ;	1°,50 ;	0,798 ;
30 ;	13 6;	1,09 ;	0,801 ;
20.	0,87.	0,69.	0,794.

EXCÈS de température du corps.	VÎTESSE de refroidissement du mercure.	VÎTESSE de refroidissement de l'acide sulfurique.	RAPPORT entre ces vîtesses.
60° ;	3°,03 ;	1°,97 ;	0,650 ;
50 ;	2,47 ;	1,59 ;	0,649 ;
40 ;	1,89 ;	1,22 ;	0,646 ;
30.	1,36.	0,89.	0,654.

Les rapports inscrits dans les dernières colonnes de chacun de tableaux, nous montrent que la loi du refroidissemeut est la même p les quatre liquides comparés ; car les petites variations irrégulières ces rapports proviennent évidemment des incertitudes de l'observati et d'ailleurs, pour les faire disparaître, il suffirait d'altérer les val des vîtesses observées, de quantités qui s'élèvent à peine à un centi de degré.

Maintenant, si des liquides aussi différens par leur nature, leur d sité et leur fluidité, présentent des lois de refroidissement absolum semblables, il est permis de généraliser ce résultat, et de conclure qu' masse liquide telle que celles dont nous avons fait usage, quelle

soit d'ailleurs sa nature, se refroidit exactement suivant cette *loi élémentaire* que nous cherchons.

Restait à examiner l'influence de la nature et de la forme du vase.

On a d'abord comparé les refroidissemens de deux sphères, l'une de verre, l'autre de fer-blanc, toutes deux pleines d'eau. (Le rayon de la boule de fer-blanc excède un peu celui de la boule de verre.)

EXCÈS de température du corps.	VITESSE de refroidissement de la boule de verre.	VITESSE de refroidissement de la boule de fer-blanc.	RAPPORT entre ces vitesses.
60°;	1°,39;	0°,90;	1,54;
50;	1,13;	0,73;	1,55;
40;	0,85;	0,54;	1,57;
30;	0,62;	0,38;	1,63;
20.	0,37.	0,21.	1,76.

Ici, les rapports indiqués dans la dernière colonne ont varié toujours dans le même sens, et nous montrent que la loi du refroidissement est plus rapide pour la boule de fer-blanc que pour la boule de verre. M. Leslie est arrivé au même résultat, qu'il a généralisé en admettant que cette loi change avec la nature des corps, et qu'elle est d'autant plus rapide que ces corps rayonnent moins. Cette proposition est vraie dans la portion de l'échelle thermométrique que M. Leslie n'a pas dépassée dans ses expériences; mais, par une circonstance très-remarquable, un effet contraire se produit dans les hautes températures : de manière que quand on compare les lois de refroidissement de deux corps de surfaces différentes, celle des deux lois qui est la plus rapide dans la partie inférieure de l'échelle, devient au contraire la moins rapide dans les températures élevées. Ainsi, dans la série rapportée plus haut, les rapports inscrits dans la dernière colonne diminuent à mesure que l'on considère de plus grands excès de température : ils augmenteraient en-

suite si l'on prolongeait la série plus loin; et suivant la propriété commune à toutes les quantités dont les variations changent de signe, ces rapports resteraient à très-peu près les mêmes dans une portion assez étendue de l'échelle thermométrique. C'est ici l'un des points les plus importans de la théorie du refroidissement. Si nous ne nous abusons pas sur l'exactitude des lois auxquelles nous sommes parvenus, on trouvera, dans la suite de ce Mémoire, une explication très-simple de ce fait remarquable, qu'on ne pouvait découvrir qu'en observant, ainsi que nous l'avons fait, les refroidissemens à partir de températures très-élevées.

C'est pour n'avoir pas pris ce soin, que MM. Dalton et Leslie sont arrivés à des conséquences si éloignées de la vérité sur la question qui nous occupe: le premier, entraîné sans doute par l'idée que la loi de Richmann se vérifiait dans son échelle thermométrique, et n'ayant pas d'ailleurs comparé les refroidissemens des surfaces différentes dans un intervalle assez étendu, avait été conduit à supposer que la loi du refroidissement est la même pour tous les corps; et M. Leslie, qui avait remarqué que cette loi change avec la nature de la surface, n'ayant pas embrassé, dans ses expériences, des températures suffisamment élevées, a cru que la différence qu'il avait découverte ne faisait que s'accroître à mesure qu'on s'avance dans l'échelle thermométrique; ce qui l'a entraîné dans des conséquences fort inexactes, sur lesquelles nous aurons occasion de revenir par la suite. Nous ferons seulement remarquer en passant qu'on doit être surpris que M. Leslie, à qui l'influence de la nature des corps sur la loi du refroidissement n'avait pas échappé, et qui en avait conclu avec raison que la loi de Richmann devait être inexacte, ait fait cependant un usage presque général de cette loi dans le calcul de toutes ses expériences.

Nous avons terminé ces recherches préliminaires en examinant le refroidissement de l'eau dans trois vases de fer-blanc de même capacité; le premier sphérique; le second cylindrique, ayant une hauteur double du diamètre de la base; et le troisième cylindrique aussi, mais ayant une hauteur de moitié de son diamètre.

EXCÈS de température.	VÎTESSE de refroidissement de la boule.	VÎTESSE DE R. du cylindre, dont la H. est double du D.	VÎTESSE DE R. du cylindre, dont la H. est moitié du D.	RAPPORT de la 3.e colonne à la 2.e	RAPPORT de la 4.e colonne à la 2.e
60° ;	0°,90 ;	1°,11 ;	1°,01 ;	1,23 ;	1,12 ;
50 ;	0,73 ;	0,89 ;	0,80 ;	1,22 ;	1,10 ;
40 ;	0,54 ;	0,66 ;	0,60 ;	1,22 ;	1,11 ;
30 ;	0,38 ;	0,47 ;	0,43 ;	1,23 ;	1,13 ;
20.	0,21.	0,26.	0,23 ;	1,24.	1,10.

La loi du refroidissement est encore la même pour les trois vases de figures différentes, ainsi que l'indiquent les rapports inscrits dans les deux dernières colonnes. La forme du vase n'a donc aucune influence sensible sur la loi du refroidissement; et ce qui confirme cette assertion, c'est que les rapports trouvés entre les vîtesses de refroidissement sont à très-peu près les mêmes que ceux qui existent entre les surfaces des trois vases, comme on peut aisément s'en assurer. En récapitulant les résultats que nous venons de faire connaître, on voit que la loi du refroidissement d'une masse liquide, variable avec l'état de la surface qui lui sert d'enveloppe, est néanmoins indépendante de la nature de ce liquide, de la forme et de la grandeur du vase qui le contient. C'est là le principe que nous nous proposions d'établir dans cette introduction, et qui va servir de base aux recherches que nous allons exposer.

Appareils destinés aux Expériences sur le Refroidissement.

Les corps dont nous avons observé le refroidissement ont été, conformément aux principes exposés précédemment, des thermomètres d'un volume tel que leurs abaissemens de température pussent être observés avec précision. Nous en avons construit deux, dont les réservoirs avaient environ l'un 6 centimètres de diamètre, l'autre 2 : le premier, contenant environ trois livres de mercure, servait aux observations dans les températures élevées; le plus petit était employé pour les basses tempéra-

tures, afin d'abréger la durée des expériences. Il était d'ailleurs facile de déduire des résultats fournis par ce dernier, ceux qu'aurait donnés le grand si l'on eût prolongé la série de son refroidissement. Il suffisait pour cela de commencer l'observation, sur le petit thermomètre, à une température plus élevée que celle à laquelle on avait terminé la série du grand. En déterminant alors le rapport de la vîtesse du refroidissement de ce dernier à celle du petit thermomètre, pour un excès commun de température, on avait le nombre par lequel on devait multiplier tous les résultats fournis par celui-ci pour obtenir les vîtesses correspondantes dans l'autre.

Ces deux instrumens, construits avec tout le soin possible, ne différaient d'ailleurs des thermomètres ordinaires qu'en ce que le tube sur lequel les degrés étaient marqués se trouvait séparé de la boule par un tube intermédiaire, dont le calibre intérieur était très-petit. On verra bientôt le motif de cette disposition.

Les expériences sur le refroidissement dans le vide, par lesquelles nous devions commencer, exigeaient que le thermomètre pût être transporté dans un espace suffisamment grand, dans lequel le vide serait fait très-promptement : il fallait aussi que l'enceinte qui environnait de toutes parts le thermomètre fût maintenue à une température connue; et comme le même appareil devait nous servir à observer le refroidissement dans l'air et dans les gaz, il fallait que ces gaz pussent y être introduits d'une manière commode et prompte. Toutes ces conditions se trouvent remplies dans la construction suivante.

(Fig. 5). L'enceinte dans laquelle s'observe le refroidissement est formée par un grand ballon en cuivre très-mince $MM'M''M'''$, dont le diamètre est d'environ 3 décimètres; le col saillant de ce ballon a été usé dans sa partie supérieure, de manière à être terminé par une surface exactement plane, qu'on rend horizontale à l'aide d'un niveau. Ce ballon est plongé, jusqu'à une petite distance de ses bords, dans une grande cuve cylindrique de bois pleine d'eau, où il est retenu dans une

position invariable par de fortes traverses *RR'*, *RR'*. On conçoit que les parois de ce ballon, étant très-minces et très-conductrices, doivent prendre constamment la température de l'eau qui les environne, et qu'étant recouvertes intérieurement de noir de fumée, elles ne peuvent réfléchir qu'une portion excessivement petite de la chaleur que leur envoie le thermomètre. Cet effet croissant d'ailleurs à-peu-près comme les pertes de chaleur du corps, l'erreur qui en résulte affecte proportionnellement tous les résultats. Il était facile d'élever la température de l'enceinte, c'est-à-dire, de l'eau environnante, en faisant arriver de la vapeur dans le tonneau par le tube recourbé *SUV*, plongeant jusqu'au fond du vase.

L'orifice du ballon est fermé par une plaque épaisse de verre *AB*, usée avec le plus grand soin sur les bords mêmes du ballon; les surfaces en contact ont d'ailleurs, à raison de l'épaisseur du col, une étendue suffisante pour que l'interposition d'une petite quantité de substance grasse rende le contact très-intime et empêche toute communication avec le dehors.

Cette plaque est percée, à son centre, d'une ouverture circulaire dans laquelle on introduit à frottement un bouchon qui porte la tige d'un thermomètre : les degrés de cet instrument commencent immédiatement au-dessus du bouchon, et le tube intermédiaire *CO* a la longueur convenable pour que la boule se trouve au centre du ballon. En donnant à ce tube intermédiaire un très-petit diamètre, on diminue la quantité de mercure hors de la boule, on empêche le courant de s'établir, et le renflement qui a lieu au commencement de l'échelle permet d'assujettir plus fortement le tube dans le bouchon. La disposition de la plaque et du thermomètre est représentée dans la *fig. 6*, où la boule de l'instrument est placée au-dessus du fourneau qui sert à l'échauffer : les écrans *AA'* sont des feuilles de fer-blanc séparées les unes des autres, et qui servent à garantir la plaque *AB* de l'action du feu.

Revenons maintenant à la *fig. 5* : la tige du thermomètre, qui est,

comme on le voit, en dehors du ballon, est recouverte par un tube évasé, dont les bords usés s'appliquent exactement sur la face supérieure de la plaque de verre. Cette espèce de cloche est terminée, dans le haut, par une pièce à robinet *D*, qui se visse à l'une des extrémités d'un tube de plomb très-flexible *DEF*, dont l'autre extrémité *F* est elle-même fortement vissée sur la platine *HK* d'une machine pneumatique. Le canal, qui, dans cette machine, fait communiquer le centre de la platine avec le baromètre, porte une autre pièce à robinet *T'*, terminée par une douille dans laquelle est mastiqué un tube plein de muriate de chaux. C'est par ce tube que s'écoule le gaz contenu dans la cloche *V*, après avoir passé par le tube recourbé *mnprs*. Cette cloche étant d'ailleurs mobile de haut en bas, on peut facilement établir l'équilibre entre l'élasticité du gaz introduit et la pression de l'atmosphère. Voici maintenant la marche que nous avons suivie dans chaque expérience.

L'eau du tonneau étant portée à la température convenable, et le thermomètre engagé dans la plaque de verre étant chauffé presqu'à l'ébullition du mercure, on le transportait rapidement dans le ballon; la cloche *CT*, qui était vissée d'avance au tube de plomb, était alors descendue sur la plaque; et tandis qu'on lutait avec soin les surfaces en contact, un aide faisait rapidement le vide au moyen de la machine pneumatique. La communication du ballon et de la cloche était d'ailleurs rendue très-libre par des ouvertures *a* et *b*, pratiquées dans le disque de verre, près de l'ouverture centrale.

Si le refroidissement devait être observé dans le vide, on s'arrêtait quand la machine cessait de dilater l'air, et l'on mesurait immédiatement à l'éprouvette la tension de ce qui restait dans le ballon. On fermait ensuite le robinet de la cloche, et l'observation commençait. Quand l'expérience se faisait dans l'air, on dilatait d'abord celui du ballon, afin d'aider au contact des surfaces, et l'on en laissait ensuite rentrer la quantité convenable ; enfin, lorsque le refroidissement devait être observé dans un gaz, on faisait d'abord le vide, puis on laissait rentrer une

certaine

certaine quantité de gaz : on faisait de nouveau le vide; après quoi, l'on introduisait la totalité du gaz qu'on voulait employer; il ne se trouvait plus alors mélangé que d'une proportion d'air tout-à-fait inappréciable.

Nous terminerons cette description en disant que les dimensions du thermomètre avaient été calculées de manière que l'observation du refroidissement pût commencer dans le vide à environ 300°. Les expériences qui ont été faites dans l'air et dans les gaz, exigeant une manipulation un peu plus longue, et ne pouvant d'ailleurs être commencées avec sûreté que lorsque l'équilibre s'était établi dans toute l'étendue du fluide, les séries d'observations qui s'y rapportent ne commencent que vers 250°.

L'expérience pour le refroidissement dans le vide ou dans un gaz ayant été préparée comme nous venons de l'expliquer, il ne restait plus qu'à observer, à l'aide d'une montre à secondes, les températures indiquées par le thermomètre après des intervalles de temps égaux entre eux; mais ces températures devaient subir deux corrections que nous allons indiquer. D'abord, on voit, par la disposition même de notre appareil, que la tige du thermomètre était, au bout de peu d'instans, à la température de l'air environnant; chaque température observée était donc trop basse d'un nombre de degrés égal à celui dont se serait dilatée la colonne de mercure contenue dans la tige du thermomètre, en la portant de la température de l'air environnant à celle de la boule. Cette correction était facile à calculer, et l'on a eu soin de l'appliquer à toutes les températures observées. La seconde correction avait pour but de ramener les indications du thermomètre à mercure à celles du thermomètre à air, et l'on s'est servi pour cela de la table rapportée dans la première partie de ce Mémoire.

Lorsqu'on avait ainsi formé rigoureusement la série des températures consécutives du thermomètre, il ne restait plus qu'à appliquer à cette série le mode de calcul que nous avons exposé plus haut. On la divisait donc en plusieurs parties, qu'on représentait chacune par des ex-

pressions de la forme $m. a^{\alpha t + \beta t^2}$, où t désigne le temps ; lesquelles servaient ensuite à calculer les vîtesses de refroidissement pour les différens excès de température : mais ces vîtesses doivent subir une diminution facile à déterminer dans chaque cas. Pour concevoir en quoi elle consiste, il faut remarquer que le refroidissement de la boule du thermomètre, provenant de la déperdition de chaleur qui a lieu par la surface, se trouve toujours un peu augmenté par la rentrée du mercure froid venant de la colonne de l'instrument : or, le volume de ce mercure était connu, ainsi que sa température ; on pouvait donc encore évaluer exactement cette dernière correction, qui, bien que très-faible, n'a pas dû être négligée.

Telle est la marche constamment suivie dans l'observation et le calcul de toutes nos expériences. Nous nous sommes contentés de déterminer les vîtesses de refroidissement pour des excès de températures, croissant de 20 en 20 degrés ; et, dans la crainte de donner trop d'étendue à ce Mémoire, nous avons supprimé tous les calculs intermédiaires qui ont servi à ces déterminations.

Nous allons maintenant entrer dans le détail de nos expériences, en les exposant dans l'ordre où elles ont été faites.

Nos recherches préliminaires nous ayant fait connaître l'influence de la nature des surfaces sur la loi du refroidissement, il était indispensable d'étudier cette loi pour divers états de la surface de nos thermomètres ; mais il fallait aussi que ces surfaces n'éprouvassent aucune altération aux plus hautes températures auxquelles elles seraient exposées. Les deux seules qui nous aient paru remplir cette condition, sont les surfaces vitreuses et argentées ; aussi la plupart de nos expériences ont-elles été faites d'abord en conservant au thermomètre sa surface naturelle, puis en la recouvrant d'une feuille d'argent très-mince. Ces deux espèces de surfaces jouissent, comme on le sait, de pouvoirs rayonnans très-différens ; le verre étant un des corps qui rayonnent le plus, et l'argent celui de tous qui rayonne le moins. Les lois auxquelles nous sommes

parvenus dans la comparaison des refroidissemens de ces deux surfaces, sont d'une telle simplicité, qu'il est hors de doute qu'elles s'appliquent à tout autre corps.

Du Refroidissement dans le Vide.

Les observations sur le refroidissement dans le vide, calculées comme nous l'avons précédemment expliqué, sont toutes affectées d'une erreur très-faible à la vérité, mais dont il est indispensable de les corriger. Cette erreur provient de la petite quantité d'air restée dans le ballon, et dont la tension, dans le plus grand nombre des expériences, ne s'élevait qu'à 3 millimètres.

Ce n'est point sur la série de températures fournie par l'observation, que cette correction peut être exécutée immédiatement; mais il est aisé de la faire subir aux vîtesses de refroidissement déduites du calcul; et pour cela, il suffit de les diminuer de la quantité correspondante à la chaleur enlevée par l'air resté dans le ballon.

Pour déterminer la valeur de cette correction dans chaque cas, nous avons observé le refroidissement de notre thermomètre dans le ballon contenant de l'air à différens degrés de densité, et nous avons calculé, pour les divers excès de température, les vîtesses de refroidissement correspondantes à chaque densité : en retranchant de ces vîtesses celles qui ont lieu dans le vide, on aurait exactement la mesure des quantités de chaleur enlevées par l'air dans ses différens états de raréfaction. On aura donc des valeurs presque exactes de ces mêmes quantités, en retranchant les vîtesses déjà très-approchées que donne l'observation du refroidissement dans le ballon, lorsqu'il ne contient plus qu'une quantité extrêmement faible de gaz.

Ayant ainsi déterminé, pour chaque excès de température et pour diverses densités, les quantités de chaleur enlevées par l'air, nous avons reconnu qu'elles suivaient une loi simple, à l'aide de laquelle nous avons déterminé, avec une précision suffisante, les corrections que devaient

subir les vîtesses calculées. Les nombres que nous rapporterons dans la suite de ce chapitre, peuvent donc être regardés comme extrêmement peu éloignés de ceux qu'on déduirait d'observations faites dans un vide absolu.

Passons maintenant à l'examen des diverses séries calculées et corrigées, et commençons par celle dans laquelle le ballon était entouré de glace fondante. Le thermomètre conserve sa surface vitreuse naturelle.

EXCÈS DE TEMPÉRATURE du thermomètre sur l'enceinte.	VÎTESSES CORRESPONDANTES de refroidissement.
240° ;	10°,69 ;
220 ;	8,81 ;
200 ;	7,40 ;
180 ;	6,10 ;
160 ;	4,89 ;
140 ;	3,88 ;
120 ;	3,02 ;
100 ;	2,30 ;
80.	1,74.

La première colonne contient les excès de température du thermomètre sur celle de l'enceinte, c'est-à-dire les températures elles-mêmes, puisque l'enceinte était à 0° : la seconde colonne renferme les vîtesses correspondantes de refroidissement, calculées et corrigées par les méthodes que nous avons indiquées. Ces vîtesses, ainsi que nous avons eu l'occasion de le dire plusieurs fois, sont les nombres de degrés dont la température s'abaisserait dans le vide durant une minute, en supposant le refroidissement uniforme pendant la durée de cette minute.

Cette première série met bien en évidence l'inexactitude de la loi de Richmann ; car, dans cette loi, la vîtesse de refroidissement à 200° devrait être double de celle qui correspond à 100°, et nous la trouvons

plus que triple. En comparant de même les pertes à 240° et à 80° d'excès, on trouve la première environ six fois plus grande, tandis que, suivant la loi de Richmann, elle devrait être seulement triple.

Rien ne serait plus facile que de représenter, avec une formule composée de deux ou trois termes, les résultats contenus dans le tableau précédent, et d'obtenir ainsi une relation empirique entre les températures des corps et les vîtesses correspondantes de refroidissement; mais les formules de ce genre, utiles sans doute lorsqu'on a besoin de calculer des effets intermédiaires compris dans la série de ceux qui ont servi à l'interpolation, deviennent presque toujours inexactes hors des limites entre lesquelles elles ont été déterminées, et ne doivent jamais être considérées comme l'expression des lois du phénomène.

Nous avons donc cru nécessaire, avant de rechercher aucune loi, de varier nos observations autant que la nature du sujet le permettait. La remarque suivante, qui ne s'était encore présentée à l'esprit d'aucun physicien, nous a heureusement dirigés dans le choix des circonstances propres à faire découvrir les élémens essentiels du problème.

Dans la théorie généralement adoptée des échanges de chaleur, le refroidissement d'un corps dans le vide n'est que l'excès de son rayonnement sur celui des corps environnans. Ainsi, en appelant θ la température de l'enceinte vide dans laquelle un corps se refroidit, et $t+\theta$ la température de ce corps, on aura en général, pour la vîtesse V du refroidissement (en observant que cette vîtesse est nulle quand t est nul):

$$V = F(t+\theta) - F(\theta);$$

F désignant la fonction inconnue de la température absolue qui représente la loi du rayonnement.

Si les fonctions $F(t+\theta)$ et $F(\theta)$ étaient proportionnelles à leurs variables, c'est-à-dire qu'elles fussent de la forme

$$m(t+\theta) \quad \text{et} \quad m(\theta),$$

m étant une constante, on trouverait la vîtesse du refroidissement égale

à mt, et l'on retomberait dans la loi de Richmann, puisque les vîtesses de refroidissement se trouveraient ainsi proportionnelles aux excès de température : ces vîtesses seraient en même temps indépendantes des températures absolues, comme on l'a supposé jusqu'à présent. Mais si la fonction F n'est point proportionnelle à sa variable, l'expression

$$F(t+\theta)-F(\theta),$$

qui représente la vîtesse du refroidissement, devra dépendre à-la-fois de l'excès de température t et de la température absolue θ de l'enceinte. C'est pour vérifier cette dernière conséquence que nous avons observé le refroidissement du thermomètre dans le vide, en amenant successivement l'eau du tonneau, dans lequel le ballon est plongé, à 20°, 40°, 60°, 80°. Le tableau suivant présente, sous un même point de vue, tous les résultats de chacune de ces séries d'observations qui ont d'ailleurs été répétées plusieurs fois.

EXCÈS de température du thermom., surface vitreuse.	VÎTESSES de refroidissement, l'enceinte à 0°.	VÎTESSES de refroidissement, l'enceinte à 20°.	VÎTESSES de refroidissement, l'enceinte à 40°.	VÎTESSES de refroidissement, l'enceinte à 60°.	VÎTESSES de refroidissement, l'enceinte à 80°.
240° ;	10°,69 ;	12°,40 ;	14°,35 ;	......	......
220 ;	8,81 ;	10,41 ;	11,98 ;	......	......
200 ;	7,40 ;	8,58 ;	10,01 ;	11°,64 ;	13°45 ;
180 ;	6,10 ;	7,04 ;	8,20 ;	9,55 ;	11,05 ;
160 ;	4,89 ;	5,67 ;	6,61 ;	7,68 ;	8,95 ;
140 ;	3,88 ;	4,57 ;	5,32 ;	6,14 ;	7,19 ;
120 ;	3,02 ;	3,56 ;	4,15 ;	4,84 ;	5,64 ;
100 ;	2,30 ;	2,74 ;	3,16 ;	3,68 ;	4,29 ;
80 ;	1,74.	1,99 ;	2,30 ;	2,73 ;	3,18 ;
60.	......	1,40.	1,62.	1,88.	2,17.

Ce tableau, qui n'a besoin d'aucune explication, confirme, comme on le voit, le principe que nous venons d'établir; mais les résultats qu'il

renferme donnent lieu à un rapprochement très-simple qui nous a conduits à la découverte de la loi du refroidissement dans le vide. Si l'on compare les nombres correspondans de la 2.ᵉ et de la 3.ᵉ colonne, c'est-à-dire, les vîtesses de refroidissement pour les mêmes excès de température, l'enceinte étant successivement à *zéro* et à 20°, on trouve que les rapports de ces vîtesses ont varié ainsi qu'il suit :

1,16... 1,18... 1,16... 1,15... 1,16... 1,17... 1,17...
1,18... 1,15.

Ces nombres, qui diffèrent déjà très-peu les uns des autres sans offrir rien de régulier dans leurs variations, n'exigeraient, pour être rendus égaux, qu'un changement, sur quelques vîtesses, qui s'éleverait à peine à un centième de leur valeur.

Comparons de même les vîtesses observées, l'enceinte étant à 20° et à 40°. On trouvera pour les rapports des vîtesses :

1,16... 1,15... 1,16... 1,16... 1,17... 1,16... 1,17...
1,15... 1,16... 1,16.

Prenons maintenant les rapports entre les vîtesses pour le cas où l'enceinte est à 40°, et celui où elle est à 60° ; on trouve :

1,15.... 1,16.... 1,16... 1,15.... 1,17.... 1,16....
1,18.... 1,16.

Enfin, on aura pour les rapports entre les vîtesses correspondantes aux cas où l'enceinte est à 60° et à 80° :

1,15... 1,15.... 1,16.... 1,17.... 1,16.... 1,17....
1,17.... 1,15.

Les trois dernières comparaisons nous conduisent au même résultat que la première, et nous apprennent en outre que le rapport constant entre deux des séries consécutives est resté le même, en portant l'enceinte de 0° à 20° ; de 20° à 40° ; de 40° à 60° ; enfin, de 60° à 80°.

Les expériences précédentes mettent donc en évidence la loi suivante :

La vîtesse de refroidissement d'un thermomètre dans le vide, pour un excès constant de température, croît en progression géométrique, quand la température de l'enceinte croît en progression arithmétique. Le rapport de cette progression géométrique est le même, quel que soit l'excès de température que l'on considère.

Cette première loi, qui se rapporte uniquement à la variation de température de l'enceinte, nous permet de mettre l'expression précédemment trouvée de la vîtesse du refroidissement dans le vide :

$$F(t+\theta) - F(\theta),$$

sous la forme :

$$\Phi t \times a^{\theta};$$

a étant un nombre constant, et $\Phi(t)$ une fonction de la variable t seulement, et qu'il s'agit de découvrir.

Les deux expressions de la vîtesse de refroidissement étant égales, nous donnent :

$$\frac{F(t+\theta) - F(\theta)}{a^{\theta}} = \Phi(t);$$

d'où, en développant en série :

$$\Phi(t) = t . \frac{F'(\theta)}{a^{\theta}} + \frac{t^2}{2} . \frac{F''(\theta)}{a^{\theta}} + \frac{t^3}{2.3} . \frac{F'''(\theta)}{a^{\theta}}, \text{ \&c.}$$

et cette équation, devant être satisfaite pour toutes les valeurs de t, exige qu'on ait :

$$F'(\theta) = m . a^{\theta},$$

m étant un nombre indéterminé; on en déduit :

$$F(\theta) = m . a^{\theta} + \text{constante};$$

et par suite :

$$F(t+\theta) = m . a^{\theta} + \text{constante}.$$

On a donc enfin pour la valeur de la vîtesse,

V

$$V = m.a^{\theta} (a^{t} - 1);$$

équation qui renferme la loi du refroidissement dans le vide.

Si l'on suppose θ constant, le coefficient ma^{θ} le sera aussi, et la loi précédente pourra s'énoncer ainsi :

Lorsqu'un corps se refroidit dans une enceinte vide et entretenue à une température constante, la vîtesse du refroidissement, pour des excès de température en progression arithmétique, croît comme les termes d'une progression géométrique diminués d'un nombre constant.

Le rapport a de cette progression est facile à trouver pour le thermomètre dont nous venons d'observer le refroidissement; car, lorsque θ augmente de 20°, t restant le même, la vîtesse du refroidissement se trouve multipliée par 1,165, moyenne entre tous les rapports déterminés précédemment. On a donc :

$$a = \sqrt[20]{(1,165)} = 1,0077 \text{ (*)}.$$

Il ne reste plus maintenant, pour vérifier l'exactitude de la loi précédente, qu'à la comparer aux différentes séries contenues dans le tableau rapporté plus haut. Commençons par celle où l'enceinte était à 0° ; on trouve alors qu'il faut faire $m = 2,037$; on a donc, pour ce cas :

$$V = 2,037 (a^{t} - 1),$$

ou

$$a = 1,0077.$$

(*) Un rapprochement assez singulier pour être remarqué, sans vouloir toutefois en tirer aucune conséquence, c'est que ce coefficient 1,0077 soit à-peu-près le carré du coefficient de la dilatation des gaz.

EXCÈS DE TEMPÉRATURE du thermomètre, ou valeurs de t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
240° ;	10°,69 ;	10°,68 ;
220 ;	8,81 ;	8,89 ;
200 ;	7,40 ;	7,34 ;
180 ;	6,10 ;	6,03 ;
160 ;	4,89 ;	4,87 ;
140 ;	3,88 ;	3,89 ;
120 ;	3,02 ;	3,05 ;
100 ;	2,30 ;	2,33 ;
80.	1,74.	1,72.

Prenons maintenant la série faite dans l'enceinte à 20°; le coefficie précédent de $(a^t - 1)$ doit être alors multiplié par $a^{20} = 1,165$; on donc :

$$V = 2,374\ (a^t - 1).$$

EXCÈS DE TEMPÉRATURE, ou valeurs de t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
240° ;	12°,40 ;	12°,46 ;
220 ;	10,41 ;	10,36 ;
200 ;	8,58 ;	8,56 ;
180 ;	7,04 ;	7,01 ;
160 ;	5,67 ;	5,68 ;
140 ;	4,57 ;	4,54 ;
120 ;	3,56 ;	3,56 ;
100 ;	2,74 ;	2,72 ;
80 ;	1,99 ;	2,00 ;
60 ;	1,40 ;	1,38 ;
40 ;	0,86 ;	0,85 ;
20.	0,39.	0,39.

ıssons à la série correspondante au cas où l'enceinte est à 40° ; le icient précédent de $(a^t - 1)$ doit être encore multiplié par = 1,165 ; ainsi :

$$V = 2{,}766\ (a^t - 1).$$

EXCÈS DE TEMPÉRATURE du thermomètre, ou valeurs de t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
240° ;	14°,35 ;	14°,44 ;
220 ;	11,98 ;	12,06 ;
200 ;	10,01 ;	9,97 ;
180 ;	8,20 ;	8,17 ;
160 ;	6,61 ;	6,62 ;
140 ;	5,32 ;	5,29 ;
120 ;	4,15 ;	4,14 ;
100 ;	3,16 ;	3,17 ;
88 ;	2,30 ;	2,33 ;
60.	1,62.	1,61.

our la série dans laquelle l'enceinte est à 60°, on aura :

$$V = 3{,}222\ (a^t - 1).$$

EXCÈS DE TEMPÉRATURE ou valeurs de t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
200° ;	11°,64 ;	11°,61 ;
180 ;	9,55 ;	9,52 ;
160 ;	7,68 ;	7,71 ;
140 ;	6,14 ;	6,16 ;
120 ;	4,84 ;	4,82 ;
100 ;	3,68 ;	3,69 ;
80 ;	2,73 ;	2,71 ;
60.	1,88.	1,87.

Enfin, quand l'enceinte est à 80°, on a :

$$V = 3{,}754\ (a^t - 1).$$

EXCÈS DE TEMPÉRATURE ou valeurs de t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
100° ;	13°,45 ;	13°,52 ;
180 ;	11,05 ;	11,09 ;
160 ;	8,95 ;	8,98 ;
140 ;	7,19 ;	7,18 ;
120 ;	5,64 ,	5,61 ;
100 ;	4,29 ;	4,30 ;
80 ;	3,18 ;	3,16 ;
60.	2,17.	2,18.

L'accord remarquable des résultats du calcul et de l'observation ne permet point de douter de l'exactitude de la loi à laquelle nous avons été conduits. Sans nous arrêter pour l'instant aux conséquences qui peuvent s'en déduire, examinons tout de suite les séries relatives à la boule argentée. Lorsque ces séries ont été calculées, nous nous sommes immédiatement aperçus, en les comparant aux séries analogues du thermomètre nu, que les vîtesses de refroidissement de celui-ci étaient, pour la même température de l'enceinte et pour les mêmes excès de température du corps, proportionnelles aux vîtesses correspondantes de refroidissement de la boule à surface argentée : la formule trouvée précédemment s'appliquera donc encore à ce genre de surface, en conservant à a la même valeur, et en diminuant convenablement m.

Notre première observation sur le refroidissement du thermomètre argenté a été faite, θ étant égal à 20°. Nous avons trouvé qu'il fallait supposer $m = 0{,}357$, et par conséquent $m a^\theta = 0{,}416$; donc :

$$V = 0{,}416\ (a^t - 1).$$

EXCÈS DE TEMPÉRATURE ou valeurs de t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
280° ;	3°,05 ;	3°,11 ;
260 ;	2,59 ;	2,61 ;
240 ;	2,18 ;	2,18 ;
220 ;	1,83 ;	1,81 ;
200 ;	1,53 ;	1,50 ;
180 ;	1,26 ;	1,23 ;
160 ;	1,02 ;	1,00 ;
140 ;	0,81 ;	0,80 ;
120 ;	0,62 ;	0,62 ;
100 ;	0,47 ;	0,48 ;
80 ;	0,34 ;	0,35 ;
60 ;	0,24 ;	0,24 ;
40 ;	0,15 ;	0,15 ;
20.	0,07.	0,07.

Une série aussi étendue que la précédente suffirait pour prouver que la formule qui satisfait au refroidissement de la boule vitreuse dans le vide, s'étend au cas de la boule argentée, en y conservant pour a la même valeur; néanmoins, pour ne négliger aucun des moyens de vérification qui nous étaient offerts, nous avons fait varier la température de l'enceinte, et nous l'avons portée de suite à 80°. Le coefficient précédent de $(a^t - 1)$ doit être multiplié par a^{60} ; ce qui donne :

$$V = 0,658\ (a^t - 1).$$

EXCÈS DE TEMPÉRATURE ou valeurs de *t*.	VALEURS observées de *V*.	VALEURS calculées de *V*.
240° ;	3°,40 ;	3°,44 ;
220 ;	2,87 ;	2,86 ;
200 ;	2,35 ;	2,37 ;
180 ;	1,92 ;	1,94 ;
160 ;	1,56 ;	1,58 ;
140 ;	1,27 ;	1,26 ;
120 ;	0,99 ;	0,98 ;
100 ;	0,75 ;	0,76 ;
80.	0,56.	0,55.

La simplicité et la généralité de la loi que nous venons d'établir, l'exactitude avec laquelle l'observation la confirme dans une étendue de près de 300° de l'échelle thermométrique, tout porte à croire qu'elle représentera rigoureusement le progrès du refroidissement dans le vide, à toutes les températures, et pour tous les corps.

Revenons maintenant au calcul qui nous a conduits à la découverte de cette loi.

Le rayonnement total de l'enceinte y est représenté par $F(\theta)$; et nous trouvons pour sa valeur :

$$m a^{\theta} + \text{constante.}$$

Or, le point à partir duquel se comptent les températures absolues θ étant arbitraire, on peut le choisir de manière que la constante soit nulle ; ce qui réduira l'expression précédente à $m a^{\theta}$. On en conclura donc que s'il était possible d'observer le refroidissement *absolu* d'un corps dans le vide, c'est-à-dire, les pertes de chaleur de ce corps, sans restitution de la part des corps environnans, ce refroidissement suivrait une loi dans laquelle les vîtesses décroîtraient en progression géométrique, les températures décroissant en progression arithmétique ; et de plus,

que le rapport de cette progression géométrique serait le même pour tous les corps, quel que fût l'état de leurs surfaces.

De cette loi très-simple en elle-même, on déduit aisément celle du refroidissement *réel* des corps dans le vide. En effet, pour passer du premier cas à celui-ci, il suffit de tenir compte de la quantité de chaleur envoyée à chaque instant par l'enceinte : cette quantité de chaleur sera constante, si la température de l'enceinte ne varie pas ; d'où il suit que la vîtesse du refroidissement réel d'un corps dans le vide, pour des excès de température en progression arithmétique, doit croître comme les termes d'une progression géométrique diminués d'un nombre constant. Ce nombre doit lui-même varier en progression géométrique, quand la température de l'enceinte (dont il représente le rayonnement absolu) varie en progression arithmétique. Ces divers résultats sont clairement exprimés dans l'équation obtenue précédemment. En y faisant $ma^\theta = M$, on a,

$$V = M\,(a^t - 1).$$

M est le nombre qu'on doit retrancher des différens termes de la progression géométrique exprimés par Ma^t, et l'on voit, en outre, que ce nombre M est lié avec θ par la relation énoncée plus haut.

Puisque la valeur de a est indépendante de la nature de la surface, il en résulte que la loi du refroidissement dans le vide est la même pour tous les corps ; en sorte que les pouvoirs rayonnans de diverses substances conservent les mêmes rapports à toutes les températures. Nous avons trouvé ce rapport égal à 5,7, en comparant le verre à l'argent : ce résultat est un peu moindre que celui de M. Leslie ; mais cela tient sans doute à ce que la surface argentée de notre thermomètre était matte, tandis que M. Leslie a employé de l'argent poli.

On voit aussi, en supposant la loi du rayonnement absolu représentée par la formule ma^θ, qu'il faut faire $\theta = \infty$ pour rendre la vîtesse nulle ; ce qui fixe le *zéro* absolu à l'infini. Cette opinion, rejetée par un grand nombre de physiciens, parce qu'elle conduisait à regarder comme infinie

la quantité de chaleur contenue dans les corps, lorsqu'on supposait leur capacité constante, devient au contraire vraisemblable, maintenant qu'on sait que les chaleurs spécifiques diminuent à mesure que la température s'abaisse; car la loi de cette diminution peut être telle, que l'intégrale des quantités de chaleur, prise jusqu'à une température infiniment basse, ait cependant une valeur finie.

La loi du refroidissement, telle que nous venons de la présenter, et telle qu'on peut l'observer dans le vide, se rapporte uniquement aux vîtesses de refroidissement estimées par l'abaissement de température qu'indiquerait un thermomètre à air. On peut voir, par la correspondance de toutes les échelles thermométriques précédemment exposée, qu'en se servant de tout autre thermomètre, les relations que nous avons découvertes entre les températures et les vîtesses de refroidissement perdraient ce caractère de simplicité et de généralité qui est l'attribut ordinaire des lois de la nature.

Si les capacités des corps pour la chaleur étaient constantes, dans l'échelle du thermomètre à air, la loi précédente donnerait encore l'expression des quantités de chaleur perdues, en fonction des températures correspondantes. Mais comme nous avons prouvé que le calorique spécifique des corps n'est constant dans aucune échelle thermométrique, on voit que, pour passer à ces pertes réelles de chaleur, il est nécessaire d'introduire un élément de plus, savoir, la variation de capacité des corps soumis à l'observation. En considérant la question sous ce point de vue, il faudrait donc connaître d'abord la loi suivant laquelle varient les capacités d'un certain corps, et déterminer ensuite, par des observations directes, les quantités de chaleur perdues par ce même corps, à des termes fixes de température indiquée par le thermomètre à air. Alors, en multipliant les vîtesses de refroidissement déduites de la loi précédente, par les capacités correspondantes, on représenterait les pertes absolues de chaleur. Ce n'est pas dans l'intervalle des deux ou trois cents premiers degrés de l'échelle centigrade que l'on peut espérer de vérifier l'exactitude de ces conséquences. La variation des capacités ne commen-

çant

çant à devenir très-sensible qu'au-delà de ce terme, il faudrait pouvoir observer à des températures de 5 à 600°. On conçoit facilement toute la difficulté d'un pareil genre d'expérience. Cependant nous sommes parvenus à construire des appareils qui réunissent toutes les conditions desirables, et nous avons déjà fait un grand nombre d'observations relatives à ce sujet; mais comme nos résultats ne présentent point toute la régularité que nous pouvons espérer de leur donner, nous en différerons encore la publication.

Le moyen que M. Leslie a employé pour mesurer les pouvoirs émissifs des surfaces de différente nature, est très-propre à faire connaître les quantités de chaleur rayonnante perdues par un corps à toutes les températures. On sait que ce moyen consiste à évaluer le rayonnement d'un corps par le réchauffement d'un thermomètre à air ou à mercure placé à une certaine distance du corps chaud, et que, pour rendre les effets plus sensibles, ce thermomètre est situé au foyer d'un réflecteur.

C'est en se servant de cet appareil, que Laroche est parvenu au résultat que nous avons précédemment rappelé. Parmi les séries d'observations faites par ce moyen, il s'en trouve une qui s'étend, à la vérité, à des températures très-élevées; mais elle ne peut être d'aucune utilité, parce que les températures ont été déterminées par un procédé fondé sur la supposition que les capacités étaient constantes : les nombres qui représentent les pertes de chaleur sont d'ailleurs affectés d'une autre erreur qui provient de ce que le réchauffement de son thermomètre focal était trop grand, pour que déjà l'inexactitude de la loi de Newton ne fût très-sensible. Mais pour faire voir que notre loi satisfait aux observations faites par ce procédé, quand elles sont débarrassées des causes d'erreurs dont nous venons de parler, nous l'appliquerons aux séries rapportées dans le même Mémoire, et qui ne sortent point des limites dans lesquelles la variation de capacité n'exerce qu'une influence inappréciable. Ces séries sont celles du rayonnement d'un creuset de fer plein de mercure. Ici, la température du corps n'ayant pas excédé 200°, on peut supposer la chaleur spécifique constante. On peut pareillement

négliger la correction que les indications du thermomètre à mercure doivent subir pour être ramenées à l'échelle du thermomètre à air, parce que, dans l'expérience de Laroche, la tige du thermomètre ne pouvant plonger en entier dans le liquide, les températures observées ont dû être affectées d'une erreur au moins égale à la correction dont il s'agit.

Au lieu de prendre chacune des séries rapportées par ce physicien, nous en avons pris en quelque sorte les moyennes en nous servant de la formule par laquelle M. Biot a représenté ces observations; formule qui se trouve pag. 634 du IVe vol. de son *Traité de physique*. Les nombres que nous donnons comme résultats de l'observation sont donc déduits de la formule de M. Biot. Pour les exprimer à l'aide de notre loi, il faut faire V, qui représente ici le rayonnement, égal à

$$4{,}24\ (a^t - 1).$$

t étant l'excès de température du creuset, et a un nombre constant que nous avons trouvé précisément égal à 1,0077.

VALEURS DE t.	VALEURS observées de V.	VALEURS calculées de V.
200°;	15°,33;	15°,29;
180;	12,51;	12,52;
160;	10,09;	10,15;
140;	8,04;	8,11;
120;	6,30;	6,36;
100;	4,84;	4,86;
80;	3,60;	3,58;
60.	2,54.	2,47.

L'accord que l'on remarque encore ici entre le calcul et l'observation, fournit une nouvelle preuve que le nombre a ne dépend ni de la masse ni de l'état de la surface du corps, puisque nous lui retrouvons, dans des circonstances fort différentes, la même valeur que dans nos expé-

riences sur le refroidissement dans le vide des surfaces vitreuses et argentées.

On peut déduire aisément de l'expression de la vîtesse du refroidissement dans le vide, la relation qui lie les températures et le temps; en effet, en désignant le temps par x, on a

$$V = -\frac{dt}{dx} = M(a^t - 1);$$

M étant un coefficient constant qui dépend seulement de la température de l'enceinte, on en conclut,

$$dx = \frac{-dt}{M(a^t - 1)}:$$

et

$$x = \frac{1}{M \log. a}\left(\log. \frac{a^t - 1}{a^t}\right) + \text{const.}$$

La constante arbitraire et le nombre M se détermineront dans chaque cas particulier, lorsqu'on aura observé les valeurs de t, répondant à deux valeurs connues du temps x.

Si l'on supposait t assez petit, pour que, eu égard à la petitesse du logarithme de a, on pût se borner aux termes de la première puissance dans le développement de a^t, on retomberait dans la loi de Newton.

Du Refroidissement dans l'Air et dans les Gaz.

Les lois du refroidissement dans le vide étant connues, rien n'est plus simple que de séparer, du refroidissement total d'un corps environné d'air ou d'un autre gaz, la portion de l'effet due au contact du fluide. Il suffit évidemment pour cela de retrancher, des vîtesses de refroidissement réelles, celles qui auraient lieu si, toutes choses égales d'ailleurs, le corps était placé dans le vide. Cette soustraction peut très-aisément s'opérer, maintenant que nous avons une formule qui représente ces vîtesses avec une grande exactitude et pour tous les cas possibles. Nous pouvons donc déterminer l'énergie du refroidissement dû au seul contact des fluides, et telle qu'elle s'observerait immédiatement si les corps pouvaient être privés de la faculté de rayonner. Cette partie de notre travail exigeait un nombre très-considérable d'expériences, puisque les lois que nous cherchions à découvrir devaient être étudiées sur des gaz différens, et, pour chacun d'eux, à des pressions et à des températures diverses. Chaque expérience a été faite et calculée comme nous l'avons expliqué plus haut ; aussi nous bornerons-nous encore à rapporter les résultats moyens et tout calculés de ces diverses observations.

La première question dont nous devions nous occuper était de rechercher si les modifications de la surface des corps, qui exercent sur le rayonnement une si puissante influence, apporteraient aussi quelque changement dans les pertes de chaleur occasionnées par le contact des fluides. Il suffisait pour cela d'observer le refroidissement de notre thermomètre dans un gaz d'une élasticité et d'une température déterminées, d'abord en conservant à la boule sa surface vitreuse et naturelle, et ensuite en la recouvrant d'une feuille d'argent.

De toutes les expériences qui ont eu cette comparaison pour objet, nous ne citerons que les deux suivantes :

Dans la première, nous avons observé le refroidissement du plus gros de nos deux thermomètres dans le ballon contenant de l'air à la pression de $0^{m},72$ et à la température de 20°.

Premier cas. Le thermomètre ayant sa surface naturelle.

EXCÈS de température du thermomètre à surface vitreuse.	VÎTESSES TOTALES de refroidissement de ce thermomètre.	VÎTESSES de refroidissement qui auraient lieu dans le vide.	DIFFÉRENCES ou vîtesses de refroidissement dues à l'air seul.
200°	14°,04;	8°,56;	5°,48;
180;	11,76;	7,01;	4,75;
160;	9,85;	5,68;	4,17;
140;	8,05;	4,54;	3,51;
120;	6,46;	3,56;	2,90;
100.	4,99.	2,72.	2,27.

Deuxième cas. Le thermomètre ayant sa surface argentée.

EXCÈS de température du thermomètre à surface argentée.	VÎTESSES TOTALES de refroidissement de ce thermomètre.	VÎTESSES de refroidissement qui auraient lieu dans le vide.	DIFFÉRENCES ou vîtesses de refroidissement dues à l'air seul.
200°;	6°,93;	1°,50;	5°,43;
180;	6,02;	1,23;	4,79;
160;	5,19;	1,00;	4,19;
140;	4,32;	0,80;	3,52;
120;	3,50;	0,62;	2,88;
100.	2,80.	0,48.	2,32.

On voit, en comparant les dernières colonnes des deux tableaux précédens, que les nombres correspondans ne présentent que des différences très-petites qu'on doit raisonnablement attribuer aux erreurs des expériences. L'air enlève donc, toutes choses égales d'ailleurs, la même quantité de chaleur aux surfaces vitreuses et aux surfaces métalliques.

Les deux tableaux suivans renferment tous les élémens d'une compa-

raison semblable faite sur le gaz hydrogène. On a seulement substitué le petit thermomètre au grand.

L'expérience a été faite à 20°, le gaz ayant une élasticité de $0^{m},74$.

Premier cas. Le thermomètre ayant sa surface naturelle.

EXCÈS de température du thermomètre à surface vitreuse.	VÎTESSES TOTALES de refroidissement de ce thermomètre.	VÎTESSES de refroidissement qui auraient lieu dans le vide.	DIFFÉRENCES ou vîtesses de refroidissement dues à l'hydrog. seul.
80° ;	22°,96 ;	5°,03 ;	17°,93 ;
60 ;	16,14 ;	3,54 ;	12,60 ;
40 ;	9,87 ;	2,18 ;	7,69 ;
20.	4,28.	0,95.	3,33.

Deuxième cas. Le thermomètre ayant sa surface argentée.

EXCÈS de température du thermomètre à surface argentée.	VÎTESSES TOTALES de refroidissement de ce thermomètre.	VÎTESSES de refroidissement qui auraient lieu dans le vide.	DIFFÉRENCES ou vîtesses de refroidissement dues à l'hydrog. seul.
80° ;	19°,59 ;	1°,77 ;	17°,82 ;
60 ;	13,97 ;	1,29 ;	12,68 ;
40 ;	8,62 ;	0,87 ;	7,75 ;
20.	3,74.	0,37.	3,37.

Cette comparaison donne pour l'hydrogène un résultat semblable à celui de l'air. L'égalité dont il s'agit se trouvant ainsi vérifiée pour des surfaces qui diffèrent autant que le verre et l'argent par leurs pouvoirs émissifs, et pour des gaz aussi différens que l'air et l'hydrogène, il est naturel de généraliser ce résultat et d'en déduire la loi suivante :

Les pertes de chaleur dues au contact d'un gaz sont, toutes choses égales d'ailleurs, indépendantes de l'état de la surface du corps qui se refroidit.

Cette loi remarquable de la communication de la chaleur a déjà été

admise par M. Leslie ; mais cet habile physicien ne l'a présentée que comme une conséquence vraisemblable de deux expériences indirectes, qui se réduisent à prouver que l'état de la surface n'a plus qu'une influence très-faible sur la durée du refroidissement total, dans les circonstances où le rayonnement ne peut plus contribuer que pour une portion très-petite à la perte de chaleur. C'est, par exemple, ce qui a lieu lorsqu'un corps échauffé est exposé à un vent très-violent, ou bien lorsqu'il est plongé dans un liquide. Quelque ingénieuses que soient de pareilles expériences, elles ne suppléent jamais complétement à des observations directes; et dans le cas dont il s'agit, n'eût-il pas été possible, par exemple, de supposer qu'une propriété reconnue à l'air animé d'une grande vîtesse ne s'appliquerait qu'avec des restrictions à l'air en repos? Ce doute serait encore plus fondé, si l'on admettait avec M. Leslie que l'air en repos enlève aux corps leur chaleur par deux moyens très-différens, savoir, par une propriété conductrice, telle qu'on la conçoit dans les solides, et par le renouvellement du fluide dû au courant ascendant. Notre procédé, en nous permettant d'abord de constater une pareille loi dans des gaz de nature diverse, dissipe, en outre, toutes les incertitudes que laissaient subsister encore les expériences de M. Leslie. C'est une des occasions où l'on peut le mieux juger des avantages de la méthode expérimentale dont nous avons fait usage.

Le principe que nous venons d'établir étant bien vérifié, nous avons pu nous borner, dans la suite de notre travail, à observer le refroidissement du thermomètre à boule nue, dans l'air et dans les différens gaz. Désormais nous ne rapporterons plus, dans nos tableaux, que les effets dus seulement au contact du gaz. Ils ont toujours été calculés, comme nous l'avons dit précédemment, en retranchant des vîtesses totales de refroidissement celles qui auraient eu lieu, dans les mêmes conditions, si le thermomètre se fût refroidi dans le vide.

Nous allons maintenant entrer dans l'examen des diverses circonstances qui peuvent modifier l'énergie des fluides élastiques dans la production du phénomène qui nous occupe. Nous étudierons l'influence

de chacune de ces causes, d'abord sur l'air, ensuite sur l'hydrogène, l'acide carbonique et le gaz oléfiant. Nous avons choisi les deux premiers, à raison de la grande différence qu'ils présentent dans quelques-unes de leurs propriétés physiques. L'air et le gaz oléfiant offraient, au contraire, le rapprochement curieux de deux gaz de densités presque égales, mais de capacités très-différentes.

L'exemple de l'influence qu'exerce, sur le refroidissement dans le vide, la température plus ou moins élevée de l'enceinte, nous a naturellement conduits à examiner, en premier lieu, si la température d'un gaz ne produirait pas un effet analogue sur les quantités de chaleur qu'il enlève. Il est inutile de dire que de pareilles expériences n'avaient point encore été tentées, les physiciens qui se sont occupés des questions de ce genre ayant toujours supposé que les vîtesses de refroidissement ne dépendent que des excès de température.

Sans nous arrêter au détail de nos premières tentatives, nous rapporterons tout de suite les tableaux où la loi se manifeste d'elle-même. Dans les expériences dont il s'agit, on a fait varier la température du gaz en échauffant convenablement l'eau qui entourait le ballon ; mais on laissait en même temps le gaz se dilater librement, de manière qu'il conservât, dans tous les cas, la même élasticité. Le tableau suivant contient les résultats d'une pareille série d'observations faites sur l'air.

EXCÈS de température du thermomètre sur l'air environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la pression $0^m,72$, et à la temp. 20°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la pression $0^m,72$, et à la temp. 40°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la pression $0^m,72$, et à la temp. 60°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la pression $0^m,72$, et à la temp. 80°.
200° ;	5°,48 ;	5°,46 ;	....	.....
180 ;	4,75 ;	4,70 ;	4°,79 ;	.....
160 ;	4,17 ;	4,16 ;	4,20 ;	4°,13 ;
140 ;	3,51 ;	3,55 ;	3,55 ;	3,49 ;
120 ;	2,90 ;	2,93 ;	2,94 ;	2,88 ;
100 ;	2,27 ;	2,28 ;	2,24 ;	2,25 ;
80 ;	1,77 ;	1,73 ;	1,7 ;	1,78 ;
60.	1,23.	1,19.	1,18.	1,20.

L'inspection seule de ce tableau montre que les vîtesses de refroidissement sont restées les mêmes, dans chacune des quatre séries, pour les mêmes excès de température. Cette loi simple était trop importante, pour qu'on ne cherchât pas à la vérifier sur d'autres fluides élastiques. Le tableau suivant offre une comparaison semblable pour le gaz hydrogène, qu'on a porté successivement à 20°, 40°, 60°, 80°. La tension a été, dans chacune des expériences, de $0^m,72$.

EXCÈS de température du thermomètre sur le gaz environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz sous la pression $0^m,72$, à la tempér. 20°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz sous la pression $0^m,72$, à la tempér. 40°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz sous la pression $0^m,72$, à la temper. 60°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz sous la pression $0^m,72$, à la tempér. 80°.
160° ;	14°,26 ;	14°,08 ;	14,18 ;	....
140 ;	12,11 ;	12,16 ;	12,12 ;	12°,08 ;
120 ;	10,10 ;	10,13 ;	10,20 ;	10,19 ;
100 ;	7,98 ;	7,83 ;	8,03 ;	8,05,
80 ;	6,06 ;	5,97 ;	6,01.	6,00 ;
60.	4,21.	4,17.	4,18.	4,20.

Ce tableau conduit à la même conséquence que le précédent. Pour

faire voir qu'elle s'étend à tous les gaz, quelles que soient leur nature et leur densité, nous réunissons ici les résultats d'expériences semblables sur l'acide carbonique à la pression de 0^m,72, et sur l'air dilaté à la pression 0^m,36.

EXCÈS de température du thermomètre sur le gaz environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique sous la press. 0^m,72, et températ. 20°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique sous la press. 0^m,72, et températ. 40°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique sous la press. 0^m,72, et températ. 60°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique sous la press. 0^m,72, et températ. 80.
200°;	5°,25;	5°,17;	....	....
180;	4,57;	4,63;	4°,52;	....
160;	4,04;	4,06;	3,97;	4°,10;
140;	3,39;	3,39;	3,34;	3,43;
120;	2,82:	2,80;	2,79;	2,83;
100.	2,22.	2,18.	2,21.	2,20.

EXCÈS de température du thermomètre sur l'air environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air sous la press. 0^m,36, et températ. 20°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air sous la press. 0^m,36, et températ. 40°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air sous la press. 0^m,36, et températ. 60°.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air sous la press. 0^m,36, et températ. 80°.
200°;	4°,01;	4°,10;	....	......
180;	3,52;	3,50;	3°,55;	......
160;	3,03;	2,99;	3,04;	3°,09;
140;	2,62;	2,57;	2,62;	2,66;
120;	2,12;	2,16;	2,14;	2,15;
100.	1,69.	1,71.	1,67.	1,73.

De toutes ces comparaisons, on peut déduire la loi suivante :

La vîtesse de refroidissement d'un corps, due au contact seul d'un gaz dépend, pour un même excès de température, de la densité et de la température du fluide; mais cette dépendance est telle, que la vîtesse du refroidissement reste la même si la densité et la température du gaz changent de manière que l'élasticité reste constante.

Dans la recherche de la loi du refroidissement produit par les gaz, on peut, d'après cela, n'avoir égard qu'à leur élasticité : c'est donc l'influence de ce dernier élément qu'il s'agit d'apprécier.

Pour y parvenir, nous avons déterminé, pour chaque gaz pris successivement à des élasticités différentes, les vîtesses de refroidissement correspondantes aux mêmes excès de température ; nous ne rapporterons de chacune de ces séries d'expériences que ce qui sera nécessaire pour mettre en évidence la loi à laquelle nous sommes parvenus.

Commençons par l'air.

Le tableau suivant renferme les vîtesses correspondantes de refroidissement dues au contact de l'air seul sous les pressions

$$0^m,72\ldots\ 0^m,36\ldots\ 0^m,18\ldots\ 0^m,09\ldots\ 0^m,045\ ;$$

c'est-à-dire, sous des pressions décroissant comme les nombres

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}.$$

EXCÈS de température du thermomètre sur l'air environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la press. 0m,72.	VÎTESSES de refoidissement dues au contact seul de l'air à la press. 0m,36.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la press. 0m,18.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la press. 0m,09.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air à la press. 0m,045.
200° ;	5°,48 ;	4°,01 ;	2°,95 ;	2°,20 ;	1°,59 ;
180 ;	4,75 ;	3,52 ;	2,61 ;	1,90 ;	1,37 ;
160 ;	4,17 ;	3,03 ;	2,21 ;	1,62 ;	1,20 ;
140 ;	3,51 ;	2,62 ;	1,91 ;	1,40 ;	1,02 ;
120 ;	2,90 ;	2,12 ;	1,57 ;	1,15 ;	0,84 ;
100 ;	2,27 ;	1,69 ;	1,23 ;	0,90 ;	0,65 ;
80 ;	1,77 ;	1,29 ;	0,96 ;	0,70 ;	0,52 ;
60 ;	1,23 ;	0,90.	0,65.	0,48.	0,35.
40 ;	0,75 ;				
20.	0,32.				

Si l'on prend les rapports des nombres correspondans de la 2.^{e} et de la 3.^{e} colonne, on trouve que leurs valeurs, en commençant par le haut, sont :

1,37... 1,35... 1,37... 1,34... 1,37... 1,34... 1,37... 1,36.

On a pareillement pour les rapports entre les nombres contenus dans la 3.ᵉ et 4.ᵉ colonne :

1,36... 1,35... 1,37... 1,37... 1,35... 1,37... 1,34... 1,37.

Pour les rapports entre les nombres de la 4.ᵉ et de la 5.ᵉ colonne :

1,34... 1,37... 1,36... 1,36... 1,37... 1,36... 1,37... 1,35.

Enfin on trouve, en divisant les termes de la 5.ᵉ colonne par ceux de la 6.ᵉ :

1,38... 1,38... 1,35... 1,37... 1,36... 1,37... 1,35... 1,37.

Tous ces rapports ne présentent que les irrégularités auxquelles on doit s'attendre dans les résultats des observations les plus soignées ; et l'on est en droit d'en tirer les conclusions suivantes :

1.° Quelle que soit l'élasticité de l'air, la vîtesse du refroidissement produit par le contact de ce fluide varie exactement de la même manière, pourvu que les excès de température restent les mêmes ;

2.° L'élasticité de l'air variant en progression géométrique, son pouvoir refroidissant change aussi en progression géométrique ; de telle manière que, quand le rapport de la première progression géométrique est 2, *celui de la seconde est* 1,366, *moyenne entre tous les nombres rapportés plus haut.*

On conçoit facilement que la loi précédente n'a dû se manifester qu'après beaucoup d'essais ; mais une fois vérifiée pour l'air, il était naturel de l'éprouver sur les autres gaz : nous allons rapporter les tableaux d'observations relatifs à chacun d'eux.

Commençons par l'hydrogène.

EXCÈS de température du thermomètre sur les gaz environnans.	VITESSES de refroidissement dues au contact seul de l'hydrogène sous la pression 0m,72.	VITESSES de refroidissement dues au contact seul de l'hydrogène sous la pression 0m,36.	VITESSES de refroidissement dues au contact seul de l'hydrogène sous la pression 0m,18.	VITESSES de refroidissement dues au contact seul de l'hydrogène sous la pression 0m,09.	VITESSES de refroidissement dues au contact seul de l'hydrogène sous la pression 0m,045.
180° ;	16°,59 ;	12°,86 ;	9°,82 ;	7°,49 ;	5°,81 ;
160 ;	14,26 ;	10,97 ;	8,37 ;	6,49 ;	4,95 ;
140 ;	12,11 ;	9,24 ;	7,11 ;	5,47 ;	4,24 ;
120 ;	10,10 ;	7,83 ;	5,99 ;	4,64 ;	3,51 ;
100 ;	7,98 ;	6,23 ;	4,72 ;	3,63 :	2,80 ;
80 ;	6,06 ;	4,62 ;	3,58 ;	2,77 ;	2,09 ;
60.	4,21.	3,21.	2,48.	1,88.	1,46.

Les rapports entre les nombres de la 2.e et de la 3.e colonne sont :

1,29... 1,30... 1,31... 1,29... 1,28... 1,31... 1,31.

Les rapports entre les nombres de la 3.e et de la 4.e colonne sont :

1,31... 1,31... 1,30... 1,31... 1,32... 1,29... 1,29.

Les rapports des nombres de la 4.e et de la 5.e colonne sont :

1,31... 1,29... 1,30... 1,29... 1,30... 1,29... 1,32.

Les rapports des nombres de la 5.e et de la 6.e colonne sont :

1,29... 1,31... 1,29... 1,32... 1,30... 1,32... 1,29.

L'égalité presque parfaite de ces nombres nous fournit donc un résultat analogue à celui qui est relatif à l'air ; ainsi :

1.° Quelle que soit l'élasticité du gaz hydrogène, l'intensité du refroidissement qu'il produit doit être représentée par une même fonction de la différence des températures ;

2.° Le pouvoir refroidissant du gaz hydrogène décroît suivant une progression géométrique dont le rapport est 1,301, *quand son élasticité diminue suivant une progression géométrique dont le rapport est* 2.

Nous sommes arrivés aux mêmes conséquences à l'égard de l'acide carbonique et du gaz oléfiant. C'est ce que l'on peut aisément vérifier sur les deux tableaux suivans, disposés pour chacun de ces gaz, comme ceux que nous avons rapportés plus haut pour l'air et l'hydrogène.

EXCÈS de température du thermomètre sur l'acide carbonique environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique à la pression $0^m,72$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique à la pression $0^m,36$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique à la pression $0^m,18$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique à la pression $0^m,09$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carbonique à la press. $0^m,045$.
200° ;	5°,25 ;	3°,64 ;	2°,56 ;	1°,79 ;	1°,25 ;
180 ;	4,57 ;	3,22 ;	2,25 ;	1,56 ;	1,09 ;
160 ;	4,04 ;	2,80 ;	1,97 ;	1,37 ;	0,95 ;
140 ;	3,39 ;	2,38 ;	1,65 ;	1,17 ;	0,80 ;
120 ;	2,82 ;	1,97 ;	1,36 ;	0,95 ;	0,67 ;
100 ;	2,22 ;	1,55 ;	1,08 ;	0,76 ;	0,52 ;
80,	1,69 ;	1,17 ;	0,82 ;	0,57 ;	0,40 ;
60.	1,18.	0,82.	0,57.	0,40.	0,28.

EXCÈS de température du thermomètre sur le gaz oléfiant environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz oléfiant à la pression $0^m,72$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz oléfiant à la pression $0^m,36$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz oléfiant à la pression $0^m,18$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz oléfiant à la pression $0^m,09$.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz oléfiant à la press. $0^m,045$.
200° ;	7°,41 ;	5°,18 ;	3°,64 ;	2°,58 ;	1°,84 ;
180 ;	6,45 ;	4,57 ;	3,17 ;	2,22 ;	1,59 ;
160 ;	5,41 ;	3,86 ;	2,72 ;	1,89 ;	1,34 ;
140 ;	4,70 ;	3,31 ;	2,35 ;	1,63 ;	1,18 ;
120 ;	3,84 ;	2,76 ;	1,92 ;	1,35 ;	0,96 ;
100 ;	3,12 ;	2,21 ;	1,55 ;	1,08 ;	0,78 ;
80.	2,34.	1,62.	1,15.	0,79.	0,62.

Moyennes de tous les rapports.

Pour l'acide carbonique = 1,431 ;
Pour le gaz oléfiant = 1,415.

On peut donc, de tout ce qui précède, tirer les conséquences suivantes :

1.° Les pertes de chaleur dues au contact d'un gaz croissent avec les excès de température suivant une loi qui reste la même, quelle que soit l'élasticité du gaz ;

2.° Pour une même différence de température, le pouvoir refroidissant d'un même gaz varie en progression géométrique, lorsque sa force élastique varie elle-même en progression géométrique ; et si l'on suppose le rapport de cette seconde progression égal à 2, le rapport de la première sera 1,366 pour l'air, 1,301 pour l'hydrogène, 1,431 pour l'acide carbonique, et 1,415 pour le gaz oléfiant.

Ce résultat peut être présenté d'une manière encore plus simple, à l'aide du calcul suivant :

Si l'on appelle P le pouvoir refroidissant de l'air à la pression p, ce pouvoir deviendra $P\,(1,366)$ à la pression $2p$; $P\,(1,366)^2$ à la pression $4p$; et enfin à une pression $p.2^n$, il serait $P(1,366)^n$; faisant

$$p.2^n = p' \quad \text{et} \quad P\,(1,366)^n = P',$$

on aura évidemment, en éliminant n :

$$\frac{\text{Log. } P' - \text{log. } P}{\text{Log. } (1,366)} = \frac{\text{Log. } p' - \text{log. } p}{\text{Log. } 2};$$

d'où, en remontant aux nombres,

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{0,45},$$

on trouverait pareillement pour l'hydrogène :

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{0,38}.$$

Pour l'acide carbonique, l'exposant serait 0,517; et pour le gaz oléfiant, 0,501.

De là on conclut que le pouvoir refroidissant d'un gaz est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à une certaine puissance de son élasticité ; mais que l'exposant de cette puissance varie en passant d'un gaz à un

autre. Il est 0,38 pour l'hydrogène, 0,45 pour l'air, 0,517 pour l'acide carbonique, et 0,501 pour le gaz oléfiant. Ces trois derniers nombres différant peu de 0,5, on peut dire que, dans les gaz auxquels ils se rapportent, le pouvoir refroidissant est à-peu-près proportionnel à la racine carrée de l'élasticité.

Si l'on compare la loi que nous venons d'énoncer aux lois approximatives proposées sur le même sujet, mais dans le cas de l'air seulement, par MM. Leslie et Dalton, on pourra juger de l'erreur dans laquelle les ont entraînés l'inexactitude des suppositions qui servent de base à tous leurs calculs, et le peu de précision que comportent les procédés dont ils ont fait usage. En effet, le premier (1), par des expériences photométriques, calculées au moyen de la loi de Newton, trouve le pouvoir refroidissant de l'air proportionnel à la racine cinquième de la densité; et M. Dalton (2) le trouve proportionnel à la racine cubique, en supposant, comme il le fait par-tout, une loi invariable pour le refroidissement total de tous les corps et dans tous les gaz.

Maintenant que l'on connaît l'influence qu'exercent sur le refroidissement la température et la densité du gaz dans lequel il a lieu, il reste à découvrir comment, pour un état donné d'un fluide, les vîtesses de refroidissement dépendent des excès de température.

Nous avons déjà reconnu que la loi qui exprime cette dépendance, reste la même, pour un même gaz, lorsque son élasticité vient à changer. Voyons maintenant ce qui arrive quand on passe d'un gaz à un autre, et, pour cela, reprenons, dans les tableaux précédens, les vîtesses de refroidissement dues au contact seul de l'air, de l'hydrogène, de l'acide carbonique et du gaz oléfiant, ces quatre fluides étant sous la pression $0^m,72$.

(1) An experimental Inquiry into the nature and propagation of heat, *p. 486.*

(2) A new System of chemical philosophy, *part. I, p. 121.*

EXCÈS

EXCÈS de température du thermomètre sur le fluide environnant.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'air sous la press. 0m,72.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'hydrogène sous la press. 0m,72.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul de l'acide carboniq. sous la press. 0m,72.	VÎTESSES de refroidissement dues au contact seul du gaz oléfiant sous la press. 0m,72.
200° ;	5°,48 ;	....	5°,25 ;	7°,41 ;
180 ;	4,75 ;	16°,59 ;	4,57 ;	6,45 ;
160 ;	4,17 ;	14,26 ;	4,04 ;	5,41 ;
140 ;	3,51 ;	12,11 ;	3,39 ;	4,70 ;
120 ;	2,90 ;	10,10 ;	2,82 ;	3,84 ;
100 ;	2,27 ;	7,98 ;	2,22 ;	3,12 ;
80.	1,77.	6,06.	1,69.	2,34.

En divisant les nombres de la 3.e colonne par ceux de la seconde, on trouve, pour les rapports entre les pertes produites par l'hydrogène et par l'air,

3,49... 3,42... 3,45... 3,48... 3,51... 3,43.

Et comme il suffirait, pour rendre ces rapports égaux, d'altérer les vîtesses qui ont servi à les déterminer, de quantités comprises entre les limites de l'incertitude que comportent toujours les observations, on peut en conclure que la loi cherchée est la même pour l'hydrogène et pour l'air.

On arrivera à une conséquence semblable relativement aux deux autres gaz, en prenant les rapports des vîtesses du refroidissement qu'ils produisent, aux vîtesses correspondantes de la première colonne ; on trouve pour l'acide carbonique la série de nombres :

0,958... 0,962... 0,968... 0,965... 0,972... 0,977... 0,955 ;

et pour le gaz oléfiant :

1,35... 1,36... 1,30... 1,33... 1,32... 1,37... 1,32.

La loi du refroidissement produit par le seul contact d'un gaz est donc indépendante de la nature et de la densité de ce gaz ; et la compa-

raison de l'une quelconque des séries rapportées plus haut, avec une série analogue de refroidissement dans le vide, montre clairement que la loi que nous cherchons diffère de celle du rayonnement.

Après un grand nombre de tentatives dont il serait inutile de rendre compte, nous avons trouvé que les vîtesses de refroidissement, dues au contact seul d'un gaz, varient, avec les excès de température du corps, suivant une loi analogue à celle qui lie le pouvoir refroidissant d'un fluide à son élasticité; c'est-à-dire que les quantités de chaleur qu'un gaz enlève à un corps croissent en progression géométrique, les excès de température de ce corps croissant aussi en progression géométrique. Le rapport de cette dernière progression étant 2, celui de la première est 2,35; et, par un calcul semblable à ceux que nous avons faits précédemment, ce résultat se transforme en celui-ci, dont l'énoncé est plus général, savoir : que les pertes de chaleur dues au contact d'un gaz sont proportionnelles aux excès de température des corps élevés à la puissance 1,233.

Pour mettre à portée de juger de l'exactitude de cette loi, nous rapporterons, dans le tableau suivant, les vîtesses de refroidissement produites par le contact de l'air à $0^{m},72$ de pression, la 2.[e] colonne contenant les valeurs observées de ces vîtesses, et la 3.[e] leurs valeurs déduites de la loi que nous venons d'énoncer.

EXCÈS DE TEMPÉRATURE.	VÎTESSES OBSERVÉES.	VÎTESSES CALCULÉES.
200°;	5°,48;	5°,45;
180;	4,75;	4,78;
160;	4,17;	4,14;
140;	3,51;	3,51;
120;	2,90;	2,91;
100;	2,27;	2,31;
80;	1,77;	1,76;
60;	1,23;	1,24;
40;	0,77;	0,75;
20.	0,33.	0,32.

Il est inutile de rapporter les comparaisons semblables que nous avons faites sur les autres gaz, et à chacune des pressions auxquelles nous avons opéré; car nous avons remarqué plus haut que les séries relatives à chacun d'eux suivent exactement la même loi que celle de l'air, et que cette loi s'observe à toutes les pressions. Au reste, les comparaisons dont nous parlons nous ont donné des résultats aussi satisfaisans que la précédente, et c'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier immédiatement sur chacune des séries d'observations que nous avons fait connaître.

Pour obtenir actuellement une expression générale de l'intensité du refroidissement occasionné par le contact d'un fluide, il est nécessaire de rassembler toutes les lois particulières que nous venons d'établir. Or, la première nous apprend que l'état de la surface du corps n'a aucune influence sur la quantité de chaleur qu'un fluide lui enlève; et la seconde prouve que la densité et la température de ce fluide n'affectent le refroidissement qu'autant qu'elles concourent à faire varier la pression ; en sorte que le pouvoir refroidissant de ce fluide ne dépend en définitif que de son élasticité. Cette élasticité et l'excès de température du corps sont donc les deux seuls élémens qui puissent faire varier la vîtesse du refroidissement. En désignant le premier de ces élémens par p, et le second par t, on aura, pour la vîtesse V du refroidissement par le contact d'un fluide :

$$V = m \,.\, p^c \,.\, t^b ,$$

b étant, pour tous les gaz et pour tous les corps, égal à 1,233 ; c étant aussi le même pour tous les corps, mais variant d'un gaz à un autre, et m ayant une valeur qui change avec la nature du gaz et avec les dimensions du corps. Les valeurs de c sont, comme nous l'avons trouvé, 0,45 pour l'air, 0,38 pour l'hydrogène, 0,517 pour l'acide carbonique, et 0,501 pour le gaz oléfiant. Les valeurs de m dépendent, ainsi que nous l'avons dit, des dimensions du corps et de la nature du gaz. Pour notre thermomètre, m est égal à 0,00919 dans l'air, à 0,0318 dans l'hydrogène, à 00,0887 dans l'acide carbonique, et à 0,01227 dans le

gaz oléfiant. (Ces valeurs de m supposent p exprimé en mètres, et t en degrés centigrades.) On pourrait, à l'aide de la valeur précédente de V, calculer les rapports des pouvoirs refroidissans des différens gaz pour chaque pression. Ainsi, en prenant pour unité le pouvoir refroidissant de l'air, et supposant la pression $= 0^m,76$, on a, pour le pouvoir refroidissant de l'hydrogène, 3,45, et pour celui de l'acide carbonique, 0,965. Ces nombres changeraient avec l'élasticité supposée aux trois gaz; c'est ce que MM. Leslie et Dalton n'ont pas aperçu, et ce qu'on déduit aisément de notre formule : néanmoins leurs déterminations s'éloignent peu de celle que nous venons de calculer pour la pression $0^m 76$. Nous reviendrons plus tard sur cet accord accidentel entre leurs expériences et les nôtres.

La simplicité de la loi générale que nous venons de faire connaître nous faisant vivement desirer de la vérifier sur des températures plus élevées que celles auxquelles il nous avait été possible d'atteindre dans les expériences précédentes, nous y sommes parvenus par un procédé très-simple dont l'idée est due à M. Leslie.

Lorsque notre thermomètre à surface vitreuse se refroidit dans l'air libre, la vîtesse totale de ce refroidissement est la somme des vîtesses dues séparément au contact de l'air et au rayonnement. En désignant celles-ci par v et v', la vîtesse totale est $v + v'$. Si le thermomètre est argenté, la vîtesse v, due à l'air, reste la même pour une même température, et v' se réduit à $\frac{v'}{5,707}$, puisque le rapport constant des pouvoirs rayonnans du verre et de l'argent est 5,707. La vîtesse totale de refroidissement du thermomètre argenté est donc $v + \frac{v'}{5,707}$. De là, il est aisé de conclure que, pour connaître, à toutes les températures, les pertes de chaleur produites par le contact de l'air, il suffit de déterminer les vîtesses totales de refroidissement de notre thermomètre, d'abord en lui conservant sa surface naturelle, puis en la recouvrant d'une feuille d'argent; ces vîtesses étant représentées par a et par b, on aura :

$$a = v + v', \quad b = v + \frac{v'}{5,707};$$

d'où :

$$v = \frac{5,707 \times b - a}{4,707};$$

Appliquons cette formule aux résultats contenus dans le tableau suivant :

EXCÈS de température du thermomètre.	VÎTESSES TOTALES de refroidissement du thermomètre vitreux.	VÎTESSES TOTALES de refroidissement du thermomètre argenté.	VALEURS DE v.
260° ;	24°,42 ;	10°,96 ;	8°,10 ;
240 ;	21,12 ;	9,82 ;	7,41 ;
220 ;	17,92 ;	8,59 ;	6,61 ;
200 ;	15,30 ;	7,57 ;	5,92 ;
180 ;	13,04 ;	6,57 ;	5,19 ;
160 ;	10,70 ;	5,59 ;	4,50 ;
140 ;	8,75 ;	4,61 ;	3,73 ;
120 ;	6,82 ;	3,80 ;	3,11 ;
100 ;	5,57 ;	3,06 ;	2,53 ;
80.	4,15.	2,32.	1,93.

La seconde et la troisième colonne contiennent les vîtesses totales de refroidissement des thermomètres à surface vitreuse et à surface argentée, pour les excès de température compris dans la première colonne. La dernière renferme les valeurs correspondantes de v, déduites de la formule ci-dessus, c'est-à-dire, les pertes de chaleur que le contact seul de l'air fait éprouver à chacun de ces thermomètres : or, d'après ce qui précède, la loi que suivent les pertes de chaleur provenant de cette cause est exprimée par l'équation :

$$v = n\, t^{1,233},$$

dans laquelle n doit être déterminé dans chaque cas particulier. Pour celui que nous considérons, $n = 0,00857$. Si l'on substitue successivement à la place de t tous les nombres de 20 en 20, depuis 80 jusqu'à 260, on

trouve pour *v* des valeurs correspondantes qui diffèrent peu de celles qui ont été déduites de l'expérience. C'est ce que l'on peut voir en comparant les nombres correspondans de la 2.e et de la 3.e colonne du tableau suivant.

EXCÈS DE TEMPÉRATURE.	VALEURS DE *v* déduites de l'observation.	VALEURS CALCULÉES DE *v*.
260° ;	8°,10 ;	8°,14 ;
240 ;	7,41 ;	7,38 ;
220 ;	6,61 ;	6,63 ;
200 ;	5,92 ;	5,87 ;
180 ;	5,19 ;	5,17 ;
160 ;	4,50 ;	4,47 ;
140 ;	3,73 ;	3,79 ;
120 ;	3,11 ;	3,14 ;
100 ;	2,53 ;	2,50 ;
80.	1,93.	1,90.

Ainsi, la loi que nous avons annoncée comme représentant les pertes de chaleur occasionnées par le contact de l'air, se trouve confirmée, en étendant les observations à de plus grands excès de température. Les résultats rapportés précédemment peuvent encore nous fournir le moyen de vérifier la loi du refroidissement dans le vide ; il suffit pour cela de retrancher des vîtesses totales de refroidissement dans l'air libre celles qui sont dues au seul contact de l'air, c'est-à-dire, les valeurs successives de *v*. Les restes seront évidemment les vîtesses du refroidissement produit par le rayonnement, ou, ce qui revient au même, celles qui auraient lieu dans le vide.

Nous rapportons ci-dessous les nombres ainsi déterminés pour le thermomètre à boule nue, en y joignant les vîtesses calculées d'après la loi du refroidissement dans le vide. On sait que ces vîtesses y sont exprimées par :

$$m\ (a^t - 1)\ ;$$

Les lois relatives à chacun des deux effets qui concourent au refro dissement d'un corps plongé dans un fluide, étant séparément établie il suffit de les rassembler pour en déduire la loi du refroidisseme total.

La vîtesse v de ce refroidissement pour un excès t de température, se donc exprimée par la formule :

$$m\ (a^t - 1) + nt^b.$$

Les quantités a et b seront, pour tous les corps et dans tous l fluides, égales, la première à 1,0077, et la seconde à 1,233. Le coef cient m dépendra de la grandeur et de la nature de la surface, ainsi q de la température absolue de l'enceinte. Le coefficient n, indépenda de cette température absolue, ainsi que de la nature de la surface (corps, variera avec l'élasticité et l'espèce de gaz dans lequel le corps se plongé ; et ces variations suivront les lois que nous avons précéde ment établies.

Cette formule nous montre d'abord, comme nous l'avons annon au commencement de ce Mémoire, que la loi du refroidissement da les fluides élastiques change avec la nature de la surface du corps. I effet, lorsque ce changement a lieu, les quantités a, b et n conserve leurs valeurs; mais le coefficient m varie proportionnellement au po voir rayonnant de la surface. Si l'on représente sa nouvelle valeur p m', la vîtesse du refroidissement deviendra :

$$m'\ (a^t - 1) + nt^b;$$

quantité qui ne reste pas proportionnelle à

$$m\ (a^t - 1) + nt^b,$$

lorsque t change.

Examinons maintenant comment varie le rapport de ces deux vîtess et supposons, pour fixer les idées, que m soit plus grand que m', c'est dire qu'il se rapporte au corps dont le rayonnement est le plus intens

On pourra d'abord s'assurer aisément, à l'aide des règles du calcul différentiel, que la fraction

$$\frac{m\,(a^t - 1) + nt^b}{m'\,(a^t - 1) + nt^b}$$

devient égale à $\frac{m}{m'}$, soit qu'on fasse $t = 0$ ou $t = \infty$.

Si l'on suppose t très-petit, la quantité $a^t - 1$ se réduit à $t . \log. a$, et le rapport précédent devient, en divisant par $t \log. a$:

$$\frac{m + \frac{n}{\log. a} . t^{b-1}}{m' + \frac{n}{\log. a} . t^{b-1}}.$$

Sous cette forme, il est évident que le rapport doit diminuer à mesure que t augmente, b étant plus grand que 1 ; mais, après avoir diminué, ce rapport augmentera, puisqu'il doit reprendre à l'infini la valeur qu'il a lorsque $t = 0$. De là, il est facile de conclure ce principe, que nous avions établi au commencement de ce Mémoire, et qui revient à dire que, lorsque l'on compare les lois du refroidissement dans deux corps de surface différente, la loi est plus rapide dans les basses températures pour le corps qui rayonne le moins, et moins rapide, au contraire, dans les températures élevées.

C'est ce qu'on peut aisément vérifier sur le tableau suivant, dans lequel on a inscrit les vîtesses de refroidissement du thermomètre nu et du thermomètre argenté, ainsi que les rapports entre ces vîtesses.

EXCÈS de température des thermomètres.	VÎTESSES de refroidissement du thermomètre à boule nue.	VÎTESSES de refroidissement du thermomètre à boule argentée.	RAPPORTS entre ces vîtesses.
260° ;	24°,42 ;	10°,96 ;	2,23 ;
240 ;	21,12 ;	9,82 ;	2,15 ;
220 ;	17,92 ;	8,59 ;	2,09 ;
200 :	15,30 ;	7,57 ;	2,02 ;
180 ;	13,04 ;	6,57 ;	1,98 ;
160 ;	10,70 ;	5,59 ;	1,91 ;
140 ;	8,75 ;	4,61 ;	1,89 ;
120 ;	6,82 ;	3,80 ;	1,80 ;
100 ;	5,56 ;	3,06 ;	1,81 ;
80 ;	4,15 ;	2,32 ;	1,78 ;
60 ;	2,86 ;	1,60 ;	1,79 ;
40 ;	1,74 ;	0,96 ;	1,81 ;
20 ;	0,77 ;	0,42 ;	1,85 ;
10.	0,37.	0,19.	1,90.

La seule inspection des nombres inscrits dans la dernière colonne confirme pleinement le fait énoncé plus haut. On y voit aussi les rapports des vîtesses de refroidissement des deux thermomètres rester à très-peu près les mêmes pour les excès de température compris entre 40° et 120°. Cette circonstance, qui résulte évidemment de ce que les rappors dont il s'agit augmentent après avoir diminué, a probablement contribué à persuader à M. Dalton que la loi du refroidissement dans l'air devait être la même pour tous les corps. Si l'on poussait plus loin ces séries, on trouverait que le rapport des vîtesses de refroidissement, qui est déjà égal à 2,23 pour un excès de température de 260°, croît rapidement à mesure que cet excès augmente ; et qu'il se rapproche de plus en plus du nombre 5,707 qui en est la limite, puisque telle est la valeur de la fraction $\frac{m}{m'}$ pour le cas du verre comparé à l'argent. Cet examen nous offre une nouvelle preuve de la nécessité indispensable d'embrasser,

dans l'étude de certains phénomènes de la chaleur, un très-grand intervalle de température; et il rend parfaitement raison des circonstances qui ont conduit M. Leslie à des résultats si différens de ceux que nous venons d'énoncer. En effet, ce célèbre physicien, partant d'observations faites à de basses températures, a pensé que le rapport dont il vient d'être question continuerait toujours à diminuer, et qu'il finirait par devenir presque égal à l'unité; en sorte que, selon lui, les pertes totales de chaleur, dans les hautes températures, seraient à-peu-près indépendantes de l'état des surfaces. Au reste, les lois que M. Leslie a proposées, celles qui l'ont été, soit par M. Dalton, soit, très-antérieurement, par Martine, peuvent toutes être réfutées par un seul argument; car toutes ces lois font uniquement dépendre la vîtesse du refroidissement, de l'excès de température du corps sur celle du milieu environnant, tandis que l'expérience prouve que, toutes choses égales d'ailleurs, cette vîtesse change d'une manière très-notable avec la température du fluide qui entoure le corps.

Il est donc inutile d'entrer dans aucune discussion à ce sujet; car, en admettant que les lois imaginées par les physiciens que nous venons de citer représentent les résultats de l'expérience dans les limites où elles ont été déterminées, il est certain, par tout ce qui précède, qu'en les étendant hors de ces limites, on arriverait à des résultats fort éloignés de la vérité.

On peut, par des considérations analogues à celles dont nous avons fait précédemment usage, déterminer de quelle manière la loi du refroidissement total change, pour un même corps, avec la nature et la densité des gaz.

La vîtesse totale du refroidissement est exprimée par

$$m\,(a^t - 1) + n\,t^b;$$

Si l'on considère un autre gaz, ou le même gaz sous une autre densité, la vîtesse de refroidissement sera, pour le même corps :

$$m\,(a^t - 1) + n'\,t^b$$

car le coefficient n est le seul qui, dans ce cas, doive changer.

En comparant ces deux expressions, on trouvera que leur rapport devient égal à l'unité, soit qu'on fasse $t = 0$ ou $t = \infty$; ainsi les vîtesses totales de refroidissement, dans des gaz différens, s'approchent de l'égalité pour des températures très-élevées, tandis que, dans la partie intermédiaire de l'échelle, ces vîtesses peuvent être très-différentes. Ce résultat suffit pour faire sentir toute l'inexactitude des procédés dont M. Dalton et M. Leslie se sont servis pour comparer les pertes de chaleur produites par le contact de plusieurs fluides élastiques; car ces procédés sont fondés sur la supposition que les vîtesses totales de refroidissement dans des gaz différens, conservent le même rapport à toutes les températures (1) : mais, par une circonstance très-singulière et sur laquelle il est inutile d'insister, la température particulière à laquelle ils ont opéré rend très-faible l'erreur dont il s'agit; aussi leurs déterminations sont-elles, ainsi que nous l'avons dit plus haut, assez approchées, en les restreignant toutefois aux circonstances dans lesquelles elles ont été faites.

La nécessité d'évaluer séparément l'influence de chacune des causes qui modifient le progrès du refroidissement d'un corps, ne nous ayant pas permis de rapprocher les unes des autres les lois diverses auxquelles nous sommes parvenus, nous avons pensé qu'une récapitulation sommaire serait d'autant plus utile, qu'on pourrait y rétablir l'ordre naturel que la description des expériences et la discussion des résultats ont souvent forcé d'interrompre.

En distinguant, comme nous l'avons fait, les pertes de chaleur dues séparément au contact des fluides et au rayonnement, on reconnaît bientôt que chacun de ces deux effets est assujetti à des lois particulières. Ces lois doivent exprimer les relations qui existent entre la température du corps et la vîtesse de son refroidissement, pour toutes les circons-

(1) Dans ses ingénieuses recherches sur la flamme (*Transactions philosoph.* 1817, Ann. de phys. et de ch. t. III), M. Davy examine aussi le pouvoir refroidissant d'un certain nombre de gaz; mais la méthode expérimentale dont ce célèbre chimiste a fait usage n'est propre qu'à faire distinguer les divers degrés de développement de cette propriété; ce qui suffisait, au reste, pour le but qu'il se proposait; mais elle ne saurait conduire à la connaissance du rapport de ces pouvoirs.

tances dans lesquelles il peut se trouver. Il faut se rappeler que par *vîtesse de refroidissement*, nous entendons toujours le nombre de degrés dont la température du corps s'abaisserait pendant un intervalle de temps infiniment petit et constant.

1.re Loi. Si l'on pouvait observer le refroidissement d'un corps placé dans un espace vide terminé par une enceinte absolument dépourvue de chaleur ou privée de la faculté de rayonner, les vîtesses de refroidissement décroîtraient en progression géométrique, lorsque les températures diminueraient en progression arithmétique.

2.me Loi. Pour une même température de l'enceinte vide dans laquelle un corps est placé, ses vîtesses de refroidissement, pour des excès de température en progression arithmétique, décroissent comme les termes d'une progression géométrique diminués d'un nombre constant. Le rapport de cette progression géométrique est le même pour tous les corps, et égal à 1,0077.

3.me Loi. La vîtesse de refroidissement dans le vide, pour un même excès de température, croît en progression géométrique, la température de l'enceinte croissant en progression arithmétique. Le rapport de la progression est encore 1,0077 pour tous les corps.

4.me Loi. La vîtesse du refroidissement, due au seul contact d'un gaz, est entièrement indépendante de la nature de la surface des corps.

5.me Loi. La vîtesse de refroidissement due au seul contact d'un fluide varie en progression géométrique, l'excès de température variant lui-même en progression géométrique. Si le rapport de cette seconde progression est 2, celui de la première est 2,35, quelle que soit la nature du gaz et sa force élastique.

Cette loi peut encore s'énoncer en disant que la quantité de chaleur enlevée par un gaz est, dans tous les cas, proportionnelle à l'excès de la température du corps élevé à la puissance 1,233.

6.me Loi. Le pouvoir refroidissant d'un fluide élastique diminue en progression géométrique, lorsque sa tension diminue elle-même en progression géométrique. Si le rapport de cette seconde progression est 2,

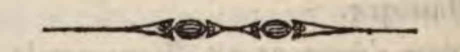
le rapport de la première est 1,366 pour l'air, 1,301 pour l'hydrogène, 1,431 pour l'acide carbonique, 1,415 pour le gaz oléfiant.

On peut encore présenter cette loi de la manière suivante :

Le pouvoir refroidissant d'un gaz est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à une certaine puissance de la pression. L'exposant de cette puissance qui dépend de la nature du gaz est 0,45 pour l'air, 0,315 pour l'hydrogène, 0,517 pour l'acide carbonique, 0,501 pour le gaz oléfiant.

7.me Loi. Le pouvoir refroidissant d'un gaz varie avec sa température de telle manière que, si ce gaz peut se dilater et qu'il conserve toujours la même force élastique, le pouvoir refroidissant se trouvera autant diminué par la raréfaction du gaz qu'il est augmenté par son échauffement ; en sorte qu'il ne dépend en définitif que de sa tension.

On voit, par l'énoncé de chacune de ces propositions, que la loi totale du refroidissement, qui se composerait de toutes les lois précédentes, doit être très-compliquée ; aussi n'essayons-nous pas de la traduire en langage ordinaire. Nous l'avons donnée dans le courant du Mémoire, sous une forme mathématique qui permet d'en discuter toutes les conséquences. Nous nous contenterons de remarquer que c'est sans doute à l'extrême complication de cette loi, considérée dans son ensemble, qu'il faut attribuer le peu de succès des tentatives faites jusqu'à ce jour pour la découvrir. On ne pouvait évidemment y parvenir qu'en étudiant à part chacune des causes qui contribuent à l'effet total.



SUITE DU MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES,

Inséré dans les deux précédens volumes de ce Journal;

PAR M. POISSON.

(On continuera, dans cette suite, l'ordre des articles du Mémoire qui s'arrête au n.° [20]).

[21.] J'AI considéré, dans mon second Mémoire *sur la Distribution de l'Électricité à la surface des Corps non conducteurs* (*), une classe nombreuse d'intégrales définies auxquelles la nature de ce Mémoire ne m'a pas permis de donner toute l'extension que j'aurais desiré; je me suis donc proposé de m'en occuper de nouveau, et c'est de ces intégrales qu'il va être maintenant question.

D'après la théorie d'Euler sur la décomposition des exponentielles en une infinité de facteurs, on a

$$\frac{e^{p}+2\cos.\theta+e^{-p}}{2(1+\cos.\theta)}=\left(1+\frac{p^2}{(\pi-\theta)^2}\right)\left(1+\frac{p^2}{(\pi+\theta)^2}\right)\left(1+\frac{p^2}{(3\pi-\theta)^2}\right)$$
$$\left(1+\frac{p^2}{(3\pi+\theta)^2}\right)\left(1+\frac{p^2}{(5\pi-\theta)^2}\right)\left(1+\frac{p^2}{(5\pi+\theta)^2}\right)\text{ \&c.};$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, e la base des

(*) Mémoires de la 1.re classe de l'Institut, année 1811, *II.e Partie.*

logarithmes dont le module est l'unité, et p et θ des quantités quelconques qui peuvent être réelles ou imaginaires.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de cette équation, et qu'on les différencie ensuite par rapport à p, on obtient un résultat que nous écrirons de cette manière :

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos.\theta + e^{-p}} = \Sigma \frac{2p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+p^2} + \Sigma \frac{2p}{[(2i-1)\pi+\theta]^2+p^2}; \quad (1)$$

i étant un nombre entier et positif, et les caractéristiques Σ indiquant des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$.

Or, en représentant par q une quantité positive quelconque, ou une quantité composée d'une partie imaginaire et d'une partie réelle et positive, et en intégrant depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$, on a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\int e^{-qt} \sin.pt.dt = \frac{p}{q^2+p^2};$$

si donc on fait $q=(2i-1)\pi-\theta$, on aura

$$\int e^{-(2i-1)\pi t} e^{\theta t} \sin.pt.dt = \frac{p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+p^2};$$

donnant à i toutes ses valeurs, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$, et observant que

$$\Sigma e^{-(2i-1)\pi t} = \frac{1}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}},$$

nous aurons

$$\int \frac{e^{\theta t} \sin.pt.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} = \Sigma \frac{p}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+p^2};$$

formule qui suppose $\theta < \pi$, afin que la valeur de q qui répond à $i=1$, ne soit pas négative : elle a aussi lieu en y mettant $p\sqrt{(-1)}$ à la place de p, pourvu qu'on ait alors $p+\theta<\pi$. En y changeant le signe de θ, il vient

$$\int \frac{e^{-\theta t} \sin. pt.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} = \Sigma \frac{p}{[(2i-1)\pi + \theta] + p^2};$$

par conséquent l'équation (1) devient

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos.\theta + e^{-p}} = 2\int \frac{(e^{\theta t} + e^{-\theta t}) \sin. pt.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}. \quad (2)$$

Cette formule en donnera trois autres, en y mettant d'abord $p\sqrt{(-1)}$ à la place de p, ce qui la change en

$$\frac{\sin. p}{\cos. p + \cos.\theta} = \int \frac{(e^{\theta t} + e^{-\theta t})(e^{pt} - e^{-pt})\,dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}; \quad (3)$$

et mettant ensuite dans celle-ci et dans la précédente, $\theta\sqrt{(-1)}$ à la place de θ, on a

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p} + e^\theta + e^{-\theta}} = 4\int \frac{\cos.\theta t.\sin. pt.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}, \quad (4)$$

$$\frac{\sin. p}{e^\theta + 2\cos. p + e^{-\theta}} = \int \frac{(e^{pt} - e^{-pt})\cos.\theta t.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}: \quad (5)$$

la formule (3) suppose $p + \theta < \pi$; et la formule (5), seulement $p < \pi$.

Ces résultats nous font déjà connaître quatre espèces distinctes d'intégrales définies; mais on en peut aussi déduire d'autres dans lesquelles le dénominateur, sous le signe $\int$, soit $e^{\pi t} + e^{-\pi t}$, au lieu d'être $e^{\pi t} - e^{-\pi t}$, comme dans celles-ci. En effet, si nous mettons successivement dans l'équation (2), $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\theta - \frac{\pi}{2}$ à la place de θ, et que nous retranchions l'une de l'autre les équations résultant de ces substitutions, nous trouverons, toute réduction faite,

$$\frac{2(e^p - e^{-p})\sin.\theta}{e^{2p} + 2\cos. 2\theta + e^{-2p}} = \int \frac{(e^{\theta t} - e^{-\theta t})\sin. pt.dt}{e^{\frac{\pi t}{2}} + e^{\frac{-\pi t}{2}}};$$

ou bien, en mettant $2t$ à la place de t, ce qui ne change rien aux limites de l'intégrale, nous aurons

$$\frac{(e^{p} - e^{-p})\sin.\theta}{e^{2p} + 2\cos.2\theta + e^{-2p}} = \int \frac{(e^{2\theta t} - e^{-2\theta t})\sin.2pt.dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}; \quad (6)$$

formule qui n'aura lieu que pour les valeurs de θ moindres que $\frac{\pi}{2}$, à cause que celle dont on l'a déduite, supposait $\theta < \pi$.

De même, en substituant successivement dans l'équation (5), $p + \frac{\pi}{2}$ et $p - \frac{\pi}{2}$ à la place de p, retranchant l'un des résultats de l'autre, réduisant et mettant $2t$ à la place de t, on trouve

$$\frac{(e^{\theta} + e^{-\theta})\cos.p}{e^{2\theta} + 2\cos.2p + e^{-2\theta}} = \int \frac{(e^{2pt} + e^{-2pt})\cos.2\theta t.dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}, \quad (7)$$

laquelle formule suppose $p < \frac{\pi}{2}$.

Ces deux équations (6) et (7) étant ainsi trouvées, le changement de p en $p\sqrt{(-1)}$ et celui de θ en $\theta\sqrt{(-1)}$ donneront quatre autres équations que, pour abréger, nous nous dispenserons d'écrire.

Ces différentes formules présentent toutes une analogie remarquable: toutes les fois que l'une des quantités p et θ, sous le signe $\int$, est comprise sous un *sinus* ou sous un *cosinus*, elle est en exposant de e hors du signe $\int$; et réciproquement, lorsque l'une d'elles est en exposant de e sous le signe $\int$, elle est comprise sous un *sinus* ou sous un *cosinus* hors du signe intégral.

[22.] Les formules les plus simples qui soient comprises dans les précédentes, sont celles que l'on obtient en faisant $\theta = 0$ dans les équations (3) et (7). Si l'on met en même temps $2p$ à la place de p dans la première, et qu'on fasse les réductions, on a

$$\frac{1}{2}\,\text{tang}\,p = \int \frac{(e^{2pt} - e^{-2pt})\,dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos.p} = \int \frac{(e^{2pt} + e^{-2pt})\,dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}.$$

Réciproquement, en partant de l'une de ces deux équations, on trou-

verait toutes celles du numéro précédent, en regardant p comme une quantité composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, c'est-à-dire, en mettant $p + \theta\sqrt{(-1)}$ à la place de p.

Si l'on désigne par x une nouvelle variable ; par n un exposant positif ; qu'on fasse $e^{-\pi t} = x^n$, et, pour abréger, $\frac{2pn}{\pi} = m$: les valeurs extrêmes $t = 0$ et $t = \frac{1}{0}$, répondront à $x = 1$ et $x = 0$, et nos deux équations deviendront

$$\frac{\pi}{2n} \cdot \text{tang.} \frac{\pi m}{2n} = \int \frac{x^m - x^{-m}}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x},$$

$$\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\cos. \frac{\pi m}{2n}} = \int \frac{x^m + x^{-m}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x};$$

les intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Ces formules sont dues, comme on sait, à Euler, qui les a démontrées pour le cas seulement où l'exposant m est réel : l'analyse précédente prouve qu'elles ont encore lieu, lorsque cet exposant est supposé imaginaire.

[23.] Chacune des intégrales que nous venons de déterminer, en fera connaître une infinité d'autres par des différenciations relatives à θ ou à p. On pourra aussi multiplier ces intégrales par dp ou $d\theta$, et intégrer sous le signe $\int$ par rapport à p ou à θ ; mais nous allons employer ce procédé de l'intégration d'une manière plus générale.

Échangeons d'abord entre elles les lettres p et θ dans l'équation (5), ce qui donne

$$\frac{\sin. \theta}{e^p + 2\cos. \theta + e^{-p}} = \int \frac{(e^{\theta t} - e^{-\theta t}) \cos. pt \,.\, dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}.$$

Multiplions celle-ci et l'équation (2) par $e^{-mp}\,dp$, m étant une quantité positive ; intégrons ensuite par rapport à p, depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \frac{1}{0}$; en observant qu'on a entre ces limites (n.° 2)

$$\int e^{-mp} \cos.\, pt\,.\,dt = \frac{m}{m^2+t^2},$$

$$\int e^{-mp} \sin.\, pt\,.\,dt = \frac{t}{m^2+t^2};$$

nous en conclurons

$$\int \frac{\sin.\,\theta\, e^{-mp}\, dp}{e^p + 2\cos.\,\theta + e^{-p}} = \int \frac{(e^{\theta t} - e^{-\theta t})\, m\, dt}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})\,(m^2+t^2)}, \qquad (8)$$

$$\int \frac{(e^p - e^{-p})\, e^{-mp}\, dp}{e^p + 2\cos.\,\theta + e^{-p}} = 2\int \frac{(e^{\theta t} + e^{-\theta t})\, t\, dt}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})\,(m^2+t^2)}. \qquad (9)$$

Or, lorsque m sera donnée en nombre entier ou fractionnaire, il sera facile d'obtenir, par les règles ordinaires, les valeurs des intégrales qui forment les premiers membres de ces équations ; car, en désignant par μ le dénominateur de m, et faisant $e^{-p} = x^{\mu}$, les fonctions à intégrer deviendront des fractions rationnelles par rapport à la nouvelle variable x. Nous pouvons donc aussi regarder comme connues, pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires de m, les intégrales définies qui forment les seconds membres de nos équations. La seconde se déduit de la première par la différenciation relative à θ ; mais la valeur qu'on obtient de cette manière se présente sous une forme moins simple que la précédente.

Le même procédé, appliqué aux équations (6) et (7), conduit à ces deux équations, dont la seconde pourrait aussi se déduire de la première par la différenciation relative à θ :

$$\int \frac{\cos.\,\theta.(e^p + e^{-p})\, e^{-mp}\, dp}{e^{2p} + 2\cos.\,2\theta + e^{-2p}} = \int \frac{(e^{2\theta t} + e^{-2\theta t})\, m\, dt}{(e^{\pi t} + e^{-\pi t})\,(m^2+4t^2)}, \qquad (10)$$

$$\int \frac{\sin.\,\theta.(e^p - e^{-p})\, e^{-mp}\, dp}{e^{2p} + 2\cos.\,2\theta + e^{-2p}} = 2\int \frac{(e^{2\theta t} - e^{-2\theta t})\, t\, dt}{(e^{\pi t} + e^{-\pi t})\,(m^2+4t^2)}; \qquad (11)$$

on doit donc aussi regarder ces deux intégrales relatives à t, comme connues pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires de la quantité m.

Il est permis de faire à volonté, dans ces quatre équations, la quantité θ réelle ou imaginaire; losrque θ est réelle, il ne faut pas qu'on ait $\theta > \pi$ dans les deux premières, et $\theta > \frac{\pi}{2}$ dans les deux dernières; mais le cas des valeurs extrêmes $\theta = \pi$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, mérite une attention particulière.

[24.] Si l'on fait $= \pi$ dans l'équation (8), son second membre se réduit à

$$\int \frac{m\,dt}{m^2 + t^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{t}{m}\right) = \frac{\pi}{2},$$

à cause des limites $t = 0$ et $t = \frac{1}{0}$; en même temps le numérateur de la fraction contenue sous le signe $\int$, dans le premier membre, devient nul à raison du facteur sin. θ, et son dénominateur se change en $\left(e^{\frac{p}{2}} - e^{\frac{-p}{2}}\right)^2$; il devient donc aussi nul ou infiniment petit pour une valeur nulle ou infiniment petite de p; mais pour toute autre valeur de p, ce dénominateur est une quantité finie, et par conséquent la fraction est égale à zéro. Il en faut donc conclure qu'il suffira de prendre l'intégrale relative à p, depuis $p = 0$ jusqu'à une valeur positive et infiniment petite de cette variable, que nous désignerons par k. Pour intégrer entre ces limites, nous ferons $\theta = \pi - \omega$, ω étant une quantité positive que nous regarderons d'abord comme infiniment petite et que nous ferons tout-à-fait nulle après l'intégration; considérant aussi la variable p comme infiniment petite, nous aurons

$$\sin.\theta = \omega, \quad e^{-mp} = 1, \quad e^p + 2\cos.\theta + e^{-p} = \omega^2 + p^2;$$

ce qui réduit le premier membre de l'équation (8) à

$$\int \frac{\omega\,dp}{\omega^2 + p^2}:$$

or, cette intégrale, prise depuis $p = 0$ jusqu'à $p = k$, est arc $\left(\text{tang} = \frac{k}{\omega}\right)$,

et quand on fait $\omega = 0$, sa valeur devient arc $(\text{tang} = \infty) = \frac{\pi}{2}$, comme celle du second membre de la même équation.

Le même raisonnement s'applique à l'équation (10), lorsqu'on y donne à θ sa valeur extrême $\theta = \frac{\pi}{2}$: quant aux équations (9) et (11), leurs deux membres deviennent infinis, ce qui n'apprend rien, quand on fait $\theta = \pi$ dans la première, et $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la seconde; mais en faisant les mêmes suppositions dans les équations (2) et (6), dont celles-ci sont déduites, on est conduit, comme on va le voir, à de nouvelles formules.

[25.] Dans le cas de $\theta = \pi$, l'équation (2) devient

$$\frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{\frac{-p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}} - e^{\frac{-p}{2}}} = 2\int \frac{(e^{\pi t} + e^{-\pi t}) \sin. pt.dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}};$$

et si l'on observe que, pour les limites $t = 0$ et $t = \frac{1}{0}$, on a (n.° 2)

$$\int \sin. pt.dt = \frac{1}{p},$$

on pourra l'écrire ainsi :

$$\frac{1 + e^{-p}}{1 - e^{-p}} - \frac{2}{p} = 4\int \frac{\sin. pt.dt}{e^{2\pi t} - 1}. \quad (12)$$

Je multiplie cette équation par $e^{-mp}dp$, m étant une quantité positive ; j'intègre, comme plus haut, depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \frac{1}{0}$; il vient

$$\int \frac{(1 + e^{-p})\, e^{-mp}\, dp}{1 - e^{-p}} - 2\int \frac{e^{-mp}\, dp}{p} = 4\int \frac{t\, dt}{(e^{2\pi t} - 1)(m^2 + t^2)};$$

et en faisant $e^{-p} = x$, cette équation devient

$$2\int \frac{x^{m-1}\, dx}{1 - x} - \int x^{m-1}\, dx + 2\int \frac{x^{m-1}\, dx}{\log. x} = 4\, \frac{t\, dt}{(e^{2\pi t} - 1)(m^2 + t^2)}.$$

Les intégrales relatives à x devront être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; de sorte qu'on a $\int x^{m-1}\, dx = \frac{1}{m}$; de plus, soit, pour abréger,

$$\int \frac{dx}{1-x} - \int \frac{dx}{\log. \frac{1}{x}} = C:$$

l'équation précédente deviendra

$$2C + 2\int \frac{(x^{m-1}-1)dx}{1-x} - \frac{1}{m} + 2\int \frac{(x^{m-1}-1)}{\log. x} . dx = 4\int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(m^2+t^2)} .$$

Mais on a la formule connue

$$\int \frac{x^{m-1}-1}{\log. x} . dx = \log. m ,$$

qui s'obtient en multipliant par dm, et intégrant par rapport à m, l'équation identique $\int x^{m-1}\, dx = \frac{1}{m}$; notre équation deviendra donc enfin

$$2C + 2\int \frac{(x^{m-1}-1)\,dx}{1-x} - \frac{1}{m} + 2\log. m = 4\int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(m^2+t^2)} . \quad (13)$$

Si l'on opère de la même manière sur l'équation (6), après y avoir fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, on est conduit à cette autre formule

$$2\int \frac{(1-x^{2m})\,dx}{1-x^2} - C - \log. 4m = 2\int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}+1)(m^2+t^2)} ; \quad (14)$$

laquelle pourrait aussi se déduire de la précédente, en y mettant $2t$ et $2m$ à la place de t et m, et observant qu'on a identiquement

$$2\int \frac{t\,dt}{(e^{4\pi t}-1)(m^2+t^2)} = \int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(m^2+t^2)} - \int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}+1)(m^2+t^2)}$$

Comme les intégrales relatives à x qui entrent dans les premiers membres de ces deux équations, peuvent s'obtenir par les méthodes

ordinaires toutes les fois que m est donnée en nombre entier ou fractionnaire, il s'ensuit que les intégrales qui forment leurs seconds membres sont aussi censées connues, pourvu que l'on connaisse la valeur numérique de C; ainsi les transcendantes en nombre infini, que l'on déduirait de ces deux intégrales, en donnant à m toutes les valeurs possibles, entières ou fractionnaires, ne dépendent que d'une seule transcendante, savoir, de la quantité désignée par C. Cette quantité représente la différence de deux intégrales, qui sont l'une et l'autre infinies; mais elle a cependant une valeur finie et déterminée, qu'on ne peut obtenir que par approximation. Euler a calculé cette valeur avec un grand nombre de décimales : celle qu'il a trouvée, réduite à six décimales, est $C = 0,577216$ (*); mais on peut aussi remarquer que l'une ou l'autre des deux formules que nous venons de trouver, fournit un moyen de calculer la valeur de C à tel degré d'approximation qu'on voudra.

En effet, on donnera à m une valeur assez grande pour qu'en développant le second membre de l'équation (13), par exemple, suivant les puissances négatives de m, on ait une série très-convergente ; les coefficiens des termes de cette série seront des transcendantes de cette forme :

$$\int \frac{t^{2n+1}\,dt}{e^{2\pi t}-1},$$

n étant un nombre entier ; or, les valeurs exactes de ces quantités sont connues, et peuvent se déduire, si l'on veut, de l'équation (12), en prenant ses différentielles impaires par rapport à p, et faisant $p=0$ après les différenciations : le développement du second membre de l'équation (13) pourra donc servir à calculer sa valeur approchée; et comme tout est connu dans le premier, excepté la quantité C, on en conclura aussi la valeur approchée de cette transcendante.

(*) Voyez son *Traité de Calcul différentiel*, et les *Mémoires* de Pétersbourg, pour l'année 1781, 2.e Partie.

Si

Si l'on voulait exprimer sa valeur exacte par une seule intégrale définie, on ferait $m = 0$ dans l'équation (13), et l'on aurait

$$C = \frac{1}{2} + 2\int \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t} - 1)(1 + t^2)}.$$

On pourrait aussi faire disparaître la quantité C de chacune des équations (13) et (14), en y mettant successivement deux quantités différentes à la place de m, et retranchant ensuite l'un de l'autre les résultats de ces deux substitutions; mais nous ne nous arrêterons point à indiquer toutes les transformations dont ces deux formules sont susceptibles, et qu'il est facile d'imaginer.

[26.] Maintenant, après avoir échangé entre elles les lettres p et θ dans l'équation (5), multiplions ses deux membres par $e^{-mp}\cos. pk.dp$, m et k étant deux quantités positives, indépendantes de p; puis intégrons, comme précédemment, depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \frac{1}{0}$; nous aurons d'abord

$$2\int e^{-mp}\cos. pt.\cos. pk.dp = \frac{m}{m^2 + (k - t)^2} + \frac{m}{m^2 + (k + t)^2};$$

et par conséquent,

$$2\sin.\theta \int \frac{e^{-mp}\cos. kp.dp}{e^p + 2\cos.\theta + e^{-p}} = \int \frac{(e^{\theta t} - e^{-\theta t})\,m\,dt}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})[m^2 + (k - t)^2]}$$
$$+ \int \frac{(e^{\theta t} - e^{-\theta t})\,m\,dt}{(e^{\pi t} - e^{-\pi t})[m^2 + (k + t)^2]}.$$

Or, si l'on suppose que m devienne infiniment petit, le coefficient de dt, dans la seconde intégrale relative à t, sera infiniment petit pour toutes les valeurs positives de t; donc l'intégrale, prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{0}$, deviendra aussi infiniment petite ou nulle. On voit de même que la première intégrale ne pourra avoir de valeurs finies que pour des valeurs de t infiniment peu différentes de k; si donc on fait $t = k + t'$, il faudra considérer t' comme une quantité infiniment

petite, et intégrer depuis $t' = -\alpha$ jusqu'à $t' = +\alpha$, α étant aussi une quantité infiniment petite et positive. La première intégrale relative à t se réduit alors à

$$\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \int \frac{m\,dt'}{m^2 + t'^2};$$

de plus, on a, entre les limites qu'on vient de fixer,

$$\int \frac{m\,dt'}{m^2 + t'^2} = 2\,.\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{}{m}\right);$$

quantité égale à π, quand on y fait $m = 0$. Nous voyons donc que dans le cas de m infiniment petit ou nul, l'équation précédente devient

$$2\ \text{sin.}\,\theta \int \frac{\text{cos.}\,kp\,.\,dp}{e^p + 2\,\text{cos.}\,\theta + e^{-p}} = \frac{\pi\,(e^{k\theta} - e^{-k\theta})}{e^{k\pi} - e^{k\pi}}.$$

Pour l'analogie des notations, nous remplacerons p par la variable t, et nous aurons cette formule remarquable

$$\int \frac{\text{cos.}\,kt\,.\,dt}{e^t + 2\,\text{cos.}\,\theta + e^{-t}} = \frac{\pi\,(e^{k\theta} - e^{-k\theta})}{2\,\text{sin.}\,\theta\,(e^{k\pi} - e^{-k\pi})}, \qquad (15)$$

dans laquelle θ ne devra pas être $> \pi$. On pourra aussi y supposer cette quantité imaginaire, et la remplacer par $\theta\sqrt{(-1)}$, ce qui donne

$$\int \frac{\text{cos.}\,kt\,.\,dt}{e^t + e^{-t} + e^\theta + e^{-\theta}} = \frac{2\pi\ \text{sin.}\,k\theta}{(e^\theta - e^{-\theta})(e^{k\pi} - e^{-k\pi})}.$$

[27.] Il n'est pas inutile d'indiquer comment on peut vérifier l'exactitude de ces nouvelles formules. Pour cela, je mets t à la place de p dans la formule d'Euler citée précédemment (n.° 21), et je l'écris sous cette forme :

$$e^t + 2\,\text{cos.}\,\theta + e^{-t} = \phi\,[(\pi-\theta)^2 + t^2]\,[(\pi+\theta)^2 + t^2]\,[(3\pi-\theta)^2 + t^2]$$
$$[(3\pi+\theta)^2 + t^2]\,[(5\pi-\theta)^2 + t^2]\,[(5\pi+\theta)^2 + t^2]\ \&c.;$$

le facteur ϕ étant une fonction de θ, indépendante de t. Je prends les

logarithmes des deux membres de cette équation, puis je les différencie par rapport à θ; il vient

$$\frac{\sin.\theta}{e^t + 2\cos.\theta + e^{-t}} = -\frac{d\varphi}{2\varphi\, d\theta} + \Sigma\,\frac{(2i-1)\pi+\theta}{[(2i-1)\pi+\theta]^2+t^2}$$
$$-\,\Sigma\,\frac{(2i-1)\pi-\theta}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+t^2};$$

les signes Σ indiquant des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$. Je multiplie les deux membres de celle-ci par $\cos.kt.dt$, k étant, comme plus haut, une quantité réelle et positive, indépendante de t; j'intègre ensuite depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$, et observant que $\int\cos.kt.dt=0$ (n.° 2), j'en conclus

$$\sin.\theta\int\frac{\cos.kt.dt}{e^t+2\cos.\theta+e^{-t}} = \Sigma\int\frac{[(2i-1)\pi+\theta]\cos.kt.dt}{[(2i-1)\pi+\theta]^2+t^2}$$
$$-\,\Sigma\int\frac{[(2i-1)\pi-\theta]\cos.kt.dt}{[(2i-1)\pi-\theta]^2+t^2}.$$

Or, on peut effectuer les intégrations relatives à t qui sont indiquées dans le second membre de cette équation, et alors il devient

$$\frac{\pi}{2}.\Sigma e^{-k\theta}e^{-(2i-1)k\pi} - \frac{\pi}{2}.\Sigma e^{k\theta}e^{-(2i-1)k\pi} = \frac{\pi(e^{-k\theta}-e^{k\theta})}{2(e^{-k\pi}-e^{k\pi})};$$

ce qui change cette équation dans la formule (15) qu'il s'agissait de vérifier.

[28.] Par le procédé direct de l'intégration des fractions rationnelles, Euler est parvenu à ce résultat remarquable par sa simplicité :

$$\int\frac{x^m+x^{-m}}{x^n+2\cos.\theta+x^{-n}}.\frac{dx}{x} = \frac{\pi\sin.\frac{m\theta}{n}}{n\sin.\theta.\sin.\frac{m\pi}{n}}; \quad (16)$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, θ étant plus petit

que π, et m et n désignant des nombres entiers et positifs, dont le premier est moindre que le second. Il observe ensuite que la même formule subsiste, lorsque ces exposans sont des quantités réelles quelconques; car si l'on y met x^q à la place de x, q étant une quantité réelle et positive, on ne change rien aux limites de l'intégrale, et en faisant $qn = n'$, $qm = m'$, il vient

$$\int \frac{x^{m'} + x^{-m'}}{x^{n'} + 2\cos.\theta + x^{-n'}} \cdot \frac{dx'}{x'} = \frac{\pi \sin. \frac{m'\theta}{n'}}{n' \sin.\theta \, . \sin. \frac{m'\pi}{n'}};$$

et à cause du facteur indéterminé q, on peut prendre maintenant pour m' et n' des quantités réelles et positives quelconques. Euler est aussi conduit, par l'induction fondée sur la généralité des formules analytiques, à regarder l'exposant m comme imaginaire; en le remplaçant donc par $m\sqrt{(-1)}$, il obtient cet autre résultat (*):

$$\int \frac{\cos. (m \log. x)}{x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi\left(e^{\frac{m\theta}{n}} - e^{\frac{-m\theta}{n}}\right)}{2n \sin.\theta \left(e^{\frac{m\pi}{n}} - e^{\frac{-m\pi}{n}}\right)},$$

qu'il ne donne que comme une simple conjecture, en observant qu'il serait à desirer qu'on pût trouver un moyen direct d'y parvenir et d'en constater l'exactitude. Or, si l'on fait, dans l'équation (15), $e^{-t} = x^n$ et $kn = m$, les limites de l'intégrale relative à x seront $x = 0$ et $x = 1$, et cette équation se changera dans la précédente, qui se trouvera, de cette manière, rigoureusement démontrée.

Réciproquement, on peut aussi observer qu'en faisant dans l'équation (16), $x^n = e^{-t}$ et $m = kn$, elle devient

$$\int \frac{(e^{kt} + e^{-kt})\, dt}{e^t + 2\cos.\theta + e^{-t}} = \frac{\pi \sin. k\theta}{\sin.\theta \, . \sin. k\pi}; \qquad (17)$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{0}$, et k étant une

(*) *Mémoires* de Pétersbourg, années 1785 et 1787.

quantité plus petite que l'unité. Or, en comparant cette formule à notre équation (15), on voit qu'elle en résulte, en y mettant $k\sqrt{(-1)}$ à la place de k; donc on peut, dans cette équation (15), regarder la quantité k comme imaginaire, ce qui ne résultait pas de l'analyse qui nous l'a fait trouver.

Ainsi, l'équation (17), qui n'est autre chose que la formule d'Euler, et notre équation (15), sont le complément l'une de l'autre, ou plutôt elles sont comprises dans la même formule, en y regardant à volonté k comme une quantité réelle ou comme imaginaire ; mais il est assez remarquable qu'il faille employer des méthodes aussi différentes, pour résoudre ces deux cas d'une même formule.

En combinant les deux méthodes, on parviendra à prouver qu'on peut aussi prendre pour k une quantité en partie réelle et en partie imaginaire : pour abréger, nous nous contenterons de l'induction qui motive suffisamment cette nouvelle extension de notre formule, et nous en supprimerons la démonstration directe ; désignant donc par $P+Q\sqrt{(-1)}$, ce que devient le second membre de l'équation (17), lorsqu'on y met $k+h\sqrt{(-1)}$ à la place de k, et comparant dans les deux membres les termes réels et les termes imaginaires, nous partagerons cette équation en deux autres, savoir :

$$\int \frac{(e^{kt}+e^{-kt})\cos. ht\,.\,dt}{e^{t}+2\cos.\theta+e^{-t}}=P,$$

$$\int \frac{(e^{kt}-e^{-kt})\sin. ht\,.\,dt}{e^{t}+2\cos.\theta+e^{-t}}=Q.$$

[29.] On ne peut pas faire $k>1$ dans ces formules; mais si l'on fait $k=1$, on a

$$P+Q\sqrt{(-1)}=\frac{\pi(e^{h\theta}+e^{-h\theta})\sin.\theta.\sqrt{(-1)}+\pi(e^{-h\theta}-e^{h\theta})\cos.\theta}{(e^{h\pi}-e^{-h\pi})\sin.\theta};$$

$$\int \frac{(e^t - e^{-t}) \sin. ht . dt}{e^t + 2 \cos. \theta + e^{-t}} = \frac{\pi (e^{h\theta} + e^{-h\theta})}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}}. \quad (18)$$

En observant que $\int \cos. ht.dt = 0$, on fera coïncider la première de ces deux formules avec l'équation (15), dans laquelle on aurait mis h à la place de k. Quant à la seconde, elle a déjà été donnée dans les Mémoires de l'Académie de Turin, par M. Plana, qui l'a trouvée de cette autre manière :

Mettons t à la place de p dans l'équation (1) du n.° 21 ; multiplions les deux membres par sin. $ht.dt$, puis intégrons depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$, nous aurons

$$\int \frac{(e^t - e^{-t}) \sin. ht . dt}{e^t + 2 \cos. \theta + e^{-t}} = \Sigma \int \frac{2t \sin. ht . dt}{[(2i-1)\pi - \theta]^2 + t^2}$$
$$+ \Sigma \int \frac{2t \sin. ht . dt}{[(2i-1)\pi + \theta]^2 + t^2}.$$

Or, entre ces limites, on a, d'après une formule connue,

$$\int \frac{t \sin. ht . dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ah};$$

a étant une quantité positive, ou composée d'une partie imaginaire et d'une partie réelle et positive ; faisant donc $a = (2i - 1)\pi - \theta$, et donnant successivement à i toutes les valeurs entières et positives, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$, on en conclura, pour la première somme Σ contenue dans l'équation précédente,

$$\Sigma \pi e^{-(2i-1)h\pi} e^{h\theta} = \frac{\pi e^{h\theta}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}}.$$

En changeant le signe de θ, on aura la valeur de la seconde somme Σ; et au moyen de ces deux valeurs, l'équation précédente se changera dans l'équation (18) qu'il s'agissait de vérifier.

[30.] Si l'on développe en série convergente l'une quelconque des

intégrales que nous avons déterminées, la valeur de l'intégrale sera connaître celle de la série; et c'est de cette manière que les intégrales définies peuvent servir à la sommation des suites infinies. Nous allons prendre l'équation (15) pour en donner un exemple.

En réduisant en série suivant les puissances de l'exponentielle e^{-t}, on a

$$\frac{\sin.\theta}{e^{t}+2\cos.\theta+e^{-t}}=e^{-t}\sin.\theta-e^{-2t}\sin.2\theta+e^{-3t}\sin.3\theta-e^{-4t}\sin.4\theta+\&c.$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs positives de t; je la multiplie par cos. $kt\,.\,dt$, et j'intègre chacun de ses termes depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{1}{0}$: or, a étant une quantité positive quelconque, on a entre ces limites

$$\int e^{-at}\,.\cos.\,kt\,.\,dt=\frac{a}{a^2+k^2}\,;$$

on aura donc

$$\sin.\theta\int\frac{\cos.\,kt\,.\,dt}{e^{t}+2\cos.\theta+e^{-t}}=\frac{\sin.\theta}{1+k^2}-\frac{2\sin.2\theta}{4+k^2}+\frac{3\sin.3\theta}{9+k^2}-\&c.$$

De là et de l'équation (15), on conclut

$$\frac{\pi(e^{k\theta}-e^{-k\theta})}{2(e^{k\pi}-e^{-k\pi})}=\frac{\sin.\theta}{1+k^2}-\frac{2\sin.2\theta}{4+k^2}+\frac{3\sin.3\theta}{9+k^2}-\&c.;\quad(19)$$

et comme l'angle θ devait être plus petit que π dans l'équation (15), il en résulte que cette nouvelle formule est aussi soumise à la [illegible] restriction; condition essentielle et sans laquelle on en pourrait [illegible] duire des conséquences évidemment absurdes. On y peut sup[illegible] imaginaire, et remplacer cette quantité par $k\sqrt{(-1)}$, pourvu [illegible] on ait $k<1$. Cette substitution donne

$$\frac{\pi\sin.k\theta}{2\sin.k\pi}=\frac{\sin.\theta}{1-k^2}-\frac{2\sin.2\theta}{[illegible]}+\frac{3\sin.3\theta}{[illegible]}\ [illegible]$$

Je mets dans la formule (19), successivement $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\theta - \frac{\pi}{2}$ à la place de θ : je retranche l'un de l'autre les résultats de ces deux substitutions; mettant, en outre, $2k$ à la place de k, et réduisant, il vient

$$\frac{\pi\,(e^{2k\theta} + e^{-2k\theta})}{4\,(e^{k\pi} + e^{-k\pi})} = \frac{\cos.\,\theta}{1 + 4k^2} - \frac{3\cos.\,3\theta}{9 + 4k^2} + \frac{5\cos.\,5\theta}{25 + 4k^2} - \&c.; \quad (20)$$

formule qui n'aura lieu que pour les valeurs de θ plus petites que $\frac{\pi}{2}$.

Si l'on différencie cette même équation (19) par rapport à θ, on en déduit

$$\frac{\pi k\,(e^{k\theta} + e^{-k\theta})}{2\,(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} = \frac{\cos.\,\theta}{1 + k^2} - \frac{4\cos.\,2\theta}{4 + k^2} + \frac{9\cos.\,3\theta}{9 + k^2} - \&c.;$$

faisant $k = 0$ dans celle-ci, on a

$$\frac{1}{2} = \cos.\,\theta - \cos.\,2\theta + \cos.\,3\theta - \cos.\,4\theta + \&c.;$$

retranchant ce résultat du précédent, et divisant par k^2, il en résulte

$$\frac{\pi\,(e^{k\theta} + e^{-k\theta})}{2k\,(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} = \frac{1}{2k^2} - \frac{\cos.\,\theta}{1 + k^2} + \frac{\cos.\,2\theta}{4 + k^2} - \frac{\cos.\,3\theta}{9 + k^2} + \&c. \quad (21)$$

Par un procédé semblable, on déduira de l'équation (20), celle-ci :

$$\frac{\pi\,(e^{2k\theta} - e^{-2k\theta})}{8k\,(e^{k\pi} + e^{-k\pi})} = \frac{\sin.\,\theta}{1 + 4k^2} - \frac{\sin.\,3\theta}{9 + 4k^2} + \frac{\sin.\,5\theta}{25 + 4k^2} - \&c. \quad (22)$$

On pourra mettre dans cette équation et dans la précédente $k\sqrt{(-1)}$ à la place de k, et il en résultera deux autres formules que nous nous dispenserons d'écrire.

Toutes ces diverses formules se trouvent déjà dans l'ouvrage de M. Legendre (*), où elles ont été déduites d'une analyse différente de

(*) *Exercices de Calcul intégral*, 5.e partie, §. IIe

la

la nôtre. Elles renferment les formules connues pour la sommation des séries de puissances réciproques des nombres. En effet, en développant les deux membres de chacune des équations (19), (20), (21) et (22) suivant les puissances de k^2, et égalant de part et d'autre les coefficiens de la même puissance, on en conclura les valeurs de ces quatre séries :

$$\left.\begin{aligned}
&\sin.\,\theta - \frac{\sin.\,2\theta}{2^{2n+1}} + \frac{\sin.\,3\theta}{3^{2n+1}} - \frac{\sin.\,4\theta}{4^{2n+1}} + \&c.,\\
&\cos.\,\theta - \frac{\cos.\,3\theta}{3^{2n+1}} + \frac{\cos.\,5\theta}{5^{2n+1}} - \&c.,\\
&\cos.\,\theta - \frac{\cos.\,2\theta}{2^{2n}} + \frac{\cos.\,3\theta}{3^{2n}} - \frac{\cos.\,4\theta}{4^{2n}} + \&c.,\\
&\sin.\,\theta - \frac{\sin.\,3\theta}{3^{2n}} + \frac{\sin.\,5\theta}{5^{2n}} - \&c.,
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

dans lesquelles n désigne un nombre entier et positif quelconque. On formera les séries analogues dont tous les termes sont précédés du même signe, au lieu d'être précédés alternativement des signes + et —, en mettant à la place de θ, $\pi - \theta$ dans la première et la troisième, et $\frac{1}{2}\pi - \theta$ dans la seconde et la quatrième.

[31.] Au reste, les valeurs de ces diverses séries se déduiront de la plus simple d'entre elles par des intégrations successives, relatives à θ; mais si l'on veut les faire servir à la sommation des séries de puissances réciproques, il faut, comme D. Bernouilli (*), éviter d'employer les sommes de ces séries à la détermination des constantes arbitraires dues aux intégrations.

Par exemple, on a l'équation

$$\frac{1}{2} = \cos.\,\theta - \cos.\,2\theta + \cos.\,3\theta - \cos.\,4\theta + \&c.,$$

qui suppose l'angle $\theta < \pi$; je la multiplie par $d\theta$, et j'intègre par rap-

(*) *Mémoires* de Pétersbourg, année 1772.

port à cet angle, il vient

$$\frac{\theta}{2} = \sin.\,\theta - \frac{\sin.\,2\,\theta}{2} + \frac{\sin.\,3\,\theta}{3} - \frac{\sin.\,4}{4} + \&c.\,:$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que les deux membres de cette équation sont nuls pour $\theta = o$. Je multiplie une seconde fois par $d\theta$, et j'intègre de nouveau, ce qui donne

$$\frac{\theta^2}{4} + C = -\cos.\,\theta + \frac{\cos.\,2\,\theta}{4} - \frac{\cos.\,3\,\theta}{9} + \frac{\cos.\,4\,\theta}{16} - \&c.\,;$$

C étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, je fais successivement $\theta = o$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$C = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \&c.,$$

$$\frac{\pi^2}{16} + C = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + \frac{1}{64} - \&c.\,;$$

la seconde série est égale au quart de la première ; on aura donc

$$\frac{\pi^2}{16} + C = \frac{1}{4}\,C \quad \text{ou} \quad C = -\frac{\pi^2}{12}\,;$$

d'où il résulte

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{4} = \cos.\,\theta - \frac{\cos.\,2\,\theta}{4} + \frac{\cos.\,3\,\theta}{9} - \frac{\cos.\,4\,\theta}{16} + \&c.,$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \&c.$$

Il est à remarquer que la première de ces deux équations a lieu pour $\theta = \pi$, quoique celle dont on l'a déduite par l'intégration, n'eût pas lieu pour cette valeur particulière : effectivement, en faisant $\theta = \pi$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.\,;$$

résultat facile à vérifier, d'après la valeur précédente de $\frac{\pi^2}{12}$.

En continuant de même, on obtient les valeurs de la première et de la troisième des quatre séries (23), pour toutes les valeurs de l'exposant n; mais ce procédé devient encore plus simple, en l'appliquant à la 2.e et à la 3.e série. On part de l'équation connue

$$\sin.\theta - \sin.3\theta + \sin.5\theta - \sin.7\theta + \&c. = 0,$$

qui suppose $\theta < \frac{\pi}{2}$. En multipliant par $d\theta$ et intégrant, on a

$$\cos.\theta - \frac{\cos.3\theta}{3} + \frac{\cos.5\theta}{5} - \frac{\cos.7\theta}{7} + \&c. = c;$$

c étant une constante arbitraire, que l'on détermine en faisant $\theta = 0$, ce qui donne

$$c = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. = \frac{\pi}{4};$$

et par conséquent,

$$\frac{\pi}{4} = \cos.\theta - \frac{\cos.3\theta}{3} + \frac{\cos.5\theta}{5} - \frac{\cos.7\theta}{7} + \&c.$$

Une seconde intégration donne

$$\frac{\pi}{4} = \sin.\theta - \frac{\sin.3\theta}{9} + \frac{\sin.5\theta}{25} - \&c.$$

Quoique l'équation précédente n'ait pas lieu pour la valeur particulière $\theta = \frac{\pi}{2}$, celle-ci subsiste dans ce cas; car elle donne

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \&c.;$$

ce qui résulte, en effet, des valeurs précédentes de $\frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{\pi^2}{12}$. Par une troisième intégration, on a

$$\frac{\pi\theta^2}{8} + c = -\cos.\theta + \frac{\cos.3\theta}{3^3} - \frac{\cos.5\theta}{5^3} + \&c.;$$

et pour déterminer la constante c, on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui fait évanouir la série, et donne $c = -\frac{\pi^3}{16}$; d'où il résulte

$$\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi\theta^2}{8} = \cos.\theta - \frac{\cos.3\theta}{3^3} + \frac{\cos.5\theta}{5^3} - \&c.$$

Par deux nouvelles intégrations, on a

$$\frac{\pi^3\theta}{16} - \frac{\pi\theta^3}{24} = \sin.\theta - \frac{\sin.3\theta}{3^4} + \frac{\sin.5\theta}{5^4} - \&c.,$$

$$\frac{\pi^3\theta^2}{32} - \frac{\pi\theta^4}{96} + c' = -\cos.\theta + \frac{\cos.3\theta}{3^5} - \frac{\cos.5\theta}{5^5} + \&c.:$$

la constante c' se détermine en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$c' = -\frac{11\pi^5}{1536};$$

et ainsi de suite.

[32.] Les séries que nous venons de considérer deviennent quelquefois des intégrales définies; et, quoique cela ne conduise pas à déterminer des intégrales qui ne soient pas encore connues, ce changement nous paraît cependant curieux à remarquer. Ainsi, en mettant $\pi - \theta$ à la place de θ, dans l'équation (19), on pourra l'écrire de cette manière :

$$\frac{\pi(e^{k\pi}e^{-k\theta} - e^{-k\pi}e^{k\theta})}{2(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} = \Sigma\frac{i\sin.i\theta}{i^2 + k^2};$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \frac{1}{0}$. Je fais $i\theta = x$, $k\theta = \alpha$, et cette équation devient

$$\frac{\pi(e^{-a}-e^{-2k\pi}e^{a})}{2(1-e^{-2k\pi})}=\Sigma\frac{x\,\theta\,\text{sin.}\,x}{x^2+a^2};$$

or, si l'on suppose que θ devienne infiniment petit et k infiniment grand, de manière que le produit $k\theta$ ou a reste une quantité finie, le premier membre de cette équation se réduira à $\frac{1}{2}\pi e^{-a}$; et en mettant dx à la place de θ, la somme Σ se changera en une intégrale ordinaire, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$; en sorte que l'on aura ce résultat déjà connu.

$$\int\frac{x\,\text{sin.}\,x\,.\,dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

De même, en mettant $\pi-\theta$ à la place de θ dans l'équation (21), et la multipliant par k, on peut l'écrire ainsi :

$$\frac{\pi(e^{-k\theta}+e^{-2k\pi}e^{k\theta})}{2(1-e^{-2k\pi})}-\frac{1}{2k}=\Sigma\frac{k\,\text{cos.}\,i\theta}{i^2+k^2};$$

la somme Σ ayant la même signification que plus haut. Faisant aussi $k\theta=a$, $i\theta=x$, on aura

$$\frac{\pi(e^{-a}+e^{-2k\pi}e^{a})}{2(1-e^{-2k\pi})}-\frac{1}{2k}=\Sigma\frac{a\,\theta\,\text{cos.}\,x}{x^2+a^2};$$

et quand θ devient infiniment petit et k infiniment grand, cette équation se change en

$$\int\frac{a\,\text{cos.}\,x\,.\,dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a};$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$; ce qui est également un résultat connu.

Sur les Intégrales des fonctions qui passent par l'infini entre les limites de l'intégration, et sur l'usage des Imaginaires dans la détermination des Intégrales définies.

[33.] Dans les recherches précédentes, nous avons toujours exclu le cas où la fonction qu'on intègre devient infinie entre les limites de l'intégration [n.os 3 et 16], à cause des difficultés que ce cas singulier présente; nous nous proposons maintenant d'examiner ces difficultés et d'essayer de les résoudre. Les géomètres qui ont considéré de semblables intégrales et qui leur ont trouvé des valeurs finies, ont supposé que les élémens infinis de l'intégrale se détruisent par l'opposition des signes $+$ et $-$; mais cette explication ne serait pas toujours admissible, car il y a de ces cas dans lesquels la fonction qu'on intègre ne change pas de signe entre les limites de l'intégration, ce qui rend impossible la destruction qu'on suppose entre les parties infinies. Par exemple, dans l'intégrale très-simple $\int\frac{dx}{x^2}$ prise depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, $\frac{dx}{x^2}$ est constamment positif, et cependant la valeur de cette intégrale définie est une quantité négative, égale à -2. Il en est de même de toutes les intégrales $\int\frac{dx}{x^m}$, dans lesquelles m est un nombre pair. Dans l'intégrale $\int\frac{dx}{x}$, prise aussi depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, les élémens passent du positif au négatif, et les parties infinies peuvent se détruire; mais alors il semblerait que l'intégrale devrait être nulle, et au contraire, elle est égale à la quantité imaginaire $-\log.(-1)$: ce logarithme a, comme on sait, une infinité de valeurs comprises sous la forme $(2n+1)\pi\sqrt{(-1)}$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et π représentant toujours le rapport de la circonférence au diamètre; or, on ne voit pas d'abord comment la somme des élémens de l'intégrale $\int\frac{dx}{x}$, qui sont tous réels, peut avoir plusieurs valeurs, et encore moins comment ces valeurs sont imaginaires.

Pour éclaircir ces difficultés, remontons à l'origine des intégrales définies, et considérons l'intégrale $\int fxdx$, dans laquelle fx est une fonction quelconque de x. Désignons par Fx une autre fonction dont $fxdx$ soit la différentielle; en sorte qu'on ait

$$\int fxdx = Fx + c,$$

c étant une constante arbitraire. Si l'on détermine cette constante, de manière que l'intégrale s'évanouisse quand $x=a$, on aura

$$Fa + c = 0 \quad \text{ou} \quad c = -Fa;$$

et si l'on donne ensuite à x la valeur déterminée $x=b$, on a

$$\int fxdx = Fb - Fa.$$

Cette quantité $Fb-Fa$ est ce qu'on appelle l'intégrale *définie*, prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, tandis que $Fx+c$ est l'intégrale générale ou indéfinie.

Dès la naissance du calcul intégral, on a regardé l'intégrale définie comme exprimant la somme des valeurs de la différentielle, et ces valeurs comme les élémens de l'intégrale; et c'est pour cette raison qu'on a indiqué les intégrales par la lettre $\int$ initiale du mot *somme*. Depuis on a senti que cette notion de l'intégrale était un véritable théorème qui avait besoin d'être démontré; on prouve donc maintenant, dans le calcul intégral, que la quantité $Fb-Fa$ est la somme des valeurs de $fxdx$, lorsque x va de $x=a$ à $x=b$ par degrés infiniment petits, chacun de ces degrés étant exprimé par dx (*). Cette proposition a lieu, quels que soient les changemens de signe de $fxdx$ entre les limites a et b; elle subsiste aussi lors même que cette différentielle passe par des valeurs imaginaires; mais la démonstration qu'on en donne suppose essentiellement qu'entre ces mêmes limites, fx de-

(*) *Calcul intégral* de M. Lacroix, 2.ᵉ édition, article 471.

meure constamment une quantité finie ; et quand, au contraire, elle passe une ou plusieurs fois par l'infini, il y a des cas dans lesquels la proposition cesse d'avoir lieu, ainsi que Lagrange l'a remarqué dans ses leçons sur le calcul des fonctions (*). Dans ces sortes de cas, l'intégrale définie n'a plus aucun rapport nécessaire avec la somme des valeurs de la différentielle, comme le prouvent les exemples $\int \frac{dx}{x}$ et $\int \frac{dx}{x^2}$, cités plus haut ; mais nous allons maintenant faire voir qu'on peut encore ramener ces cas d'exception à la notion ordinaire des intégrales, regardées comme les sommes de leurs élémens ; ce qui fera disparaître l'espèce d'anomalie qu'ils présentent.

[34.] Il suffit pour cela de faire en sorte que la variable x passe de la limite a à la limite b, par une série de valeurs imaginaires ; alors fx ne deviendra plus infinie pour aucune de ces valeurs intermédiaires, et l'intégrale définie reprendra sa signification ordinaire : ainsi, relativement à l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$, prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, je fais

$$x = -[\cos. z + \sin. z . \sqrt{(-1)}],$$

et j'intègre par rapport à z depuis $z = 0$ jusqu'à $z = (2n+1)\pi$, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Les valeurs extrêmes de x seront toujours

$$x = -1 \text{ et } x = +1 ;$$

mais en allant d'une limite à l'autre, cette variable ne passera plus par la valeur $x = 0$ qui rendait infinie la quantité $\frac{1}{x}$. Nous aurons alors

$$dx = \sin. z - \cos. z . \sqrt{(-1)} = -\sqrt{(-1)}[\cos. z + \sin. z . \sqrt{(-1)}];$$

par conséquent

(*) XIIe Cahier de ce *Journal*, page 69.

$$\int \frac{dx}{x} = -\sqrt{(-1)}\, dz = z\sqrt{(-1)} + c,$$

pour l'intégrale générale, et

$$\int \frac{dx}{x} = -(2n+1)\pi\sqrt{(-1)},$$

pour l'intégrale définie. Ce résultat est le même que précédemment; mais les valeurs intermédiaires de la variable x étant imaginaires, il n'est plus étonnant que la somme des valeurs de la différentielle, ou l'intégrale, le soit aussi.

J'applique la même transformation à l'intégrale $\int \frac{dx}{x^m}$, prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, m étant un nombre entier quelconque. On aura

$$\int \frac{dx}{x^m} = -(-1)^m \sqrt{(-1)} \int \frac{dz}{[\cos. z + \sin. z.\sqrt{(-1)}]^{m-1}};$$

d'après la formule de Moivre, cette expression deviendra

$$\int \frac{dx}{x^m} = -(-1)^m \sqrt{(-1)} \int [\cos.(m-1)z - \sin.(m-1)z.\sqrt{(-1)}]\, dz;$$

intégrant, comme plus haut, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = (2n+1)\pi$, et observant que $\sin. (m-1)(2n+1)\pi = 0$, il en résultera

$$\int \frac{dx}{x^m} = \frac{(-1)^m}{m-1} . [\cos. (m-1)(2n+1)\pi - 1].$$

Si m est un nombre impair, différent de l'unité, cette valeur se réduit à zéro; si m est pair, elle est égale à $-\frac{2}{m}$: c'est ce qu'on trouve en intégrant $\frac{dx}{x^m}$ immédiatement; mais par notre transformation, les valeurs de cette différentielle n'étant pas toutes positives dans le cas de m pair, il n'est pas absurde que leur somme soit une quantité négative.

[35.] Le théorème que nous venons d'énoncer dans le n.° 33, pouvant être regardé comme la proposition fondamentale de la théorie des intégrales définies, il ne sera pas déplacé d'en donner ici la démonstration. Désignons donc par y et $y+z$ deux valeurs de x comprises entre les limites a et b; comme on a $d.Fx = fx\,dx$, et comme on suppose que fx ne devient point infinie entre ces limites, il en résulte que si l'on développe $F(y+z)$ suivant les puissances de z, les deux premiers termes de la série seront toujours $Fy+zfy$: on pourra de plus désigner le reste du développement par Rz^{1+k}, R étant une fonction de y et z qui ne devient infinie pour aucune valeur de ces quantités, et k un exposant positif quelconque; de cette manière, on aura donc

$$F(y+z) = Fy + zfy + Rz^{1+k}.$$

Le plus souvent on pourra supposer l'exposant $1+k$ égal à 2; mais si la différentielle seconde de Fx devenait infinie pour une ou plusieurs valeurs de x, comprises entre a et b, le troisième terme du développement de $F(y+z)$ contiendrait une puissance de z dont l'exposant serait compris entre 1 et 2, lorsqu'on prendrait pour y l'une de ces valeurs particulières : or, c'est pour éviter ce cas d'exception, que nous avons représenté par $1+k$, l'exposant de la puissance de z qui multiplie tous les termes de ce développement à partir du troisième.

Cela posé, partageons l'intervalle $b-a$ en un nombre quelconque n de parties égales; soit $\frac{b-a}{n} = \alpha$, l'une de ces parties; faisons $z=\alpha$, et donnons successivement à y les n valeurs a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, ... $a+(n-1)\alpha$; désignons aussi par R_0, R_1, R_2, ... R_{n-1}, les valeurs correspondantes de R; en vertu de l'équation précédente, nous aurons cette suite de n équations, savoir :

$$F(a+\alpha) = Fa + \alpha fa + R_0 \alpha^{1+k},$$

$$F(a+2\alpha) = F(a+\alpha) + \alpha f(a+\alpha) + R_1 \alpha^{1+k},$$

$$F(a+3\alpha) = F(a+2\alpha) + \alpha f(a+2\alpha) + R_2 \alpha^{1+k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F[a+(n-1)\alpha] = F[a+(n-2)\alpha] + \alpha f[a+(n-2)\alpha] + R_{n-2} \alpha^{1+k},$$

$$F(a+n\alpha) = F[a+(n-1)\alpha] + \alpha f[a+(n-1)\alpha] + R_{n-1} \alpha^{1+k}.$$

En en faisant la somme et observant que $a+n\alpha=b$, on aura

$$Fb = Fa + S + T\alpha^{1+k},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\alpha fa + \alpha f(a+\alpha) + \alpha f(a+2\alpha) + \ldots + \alpha f[a+(n-1)\alpha] = S,$$

$$R_0 + R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_{n-1} = T.$$

Or, la quantité R ne pouvant pas devenir infinie, si nous désignons par M le *maximum* de cette quantité, abstraction faite du signe, pour toutes les valeurs de y et $y+z$ comprises entre a et b, nous aurons évidemment $T < nM$; d'où nous conclurons, en faisant aussi abstraction du signe, et mettant $b-a$ à la place de $n\alpha$.

$$Fb - Fa - S < M(b-a)\alpha^k.$$

Maintenant, à mesure que le nombre n augmente, la différence α diminue; le second membre de cette inégalité diminue en même temps, et peut devenir plus petit qu'aucune quantité donnée : il en faut donc conclure que $Fb - Fa$ est rigoureusement la limite de la somme représentée par S; ou bien, en employant le langage des infiniment

petits, nous dirons, ce qu'il s'agissait de démontrer, que $Fb - Fa$ est la somme des valeurs de $fx dx$, lorsque x va, par degrés infiniment petits, de $x = a$ à $x = b$, dx étant la différence entre deux valeurs consécutives de cette variable.

Ainsi que nous l'avons remarqué d'avance, cette démonstration suppose que fx ne devient infinie pour aucune des valeurs intermédiaires de x; si cependant elle le devenait pour une valeur $x = c$, comprise entre a et b, et que cela fût dû à un diviseur $(x - c)^m$, la proposition serait encore vraie, pourvu que l'exposant m fût plus petit que l'unité; car alors il serait aisé de faire disparaître ce diviseur par un simple changement de variable, en faisant $(x - c)^{1-m} = t$, ce qui donnerait

$$\frac{dx}{(x - c)^m} = \frac{dt}{1 - m}.$$

La proposition précédente ne pourra donc se trouver en défaut qu'autant que l'exposant du diviseur qui rend fx infinie, sera > 1, ou au moins égal à l'unité.

[36.] Toutes les fois qu'une intégrale sera regardée comme la somme des valeurs de la différentielle, il est évident que si a et b sont les valeurs extrêmes de la variable, et c une valeur intermédiaire $> a$ et $< b$, on pourra partager l'intégrale en deux portions, l'une depuis $x = a$ jusqu'à $x = c$, et l'autre depuis $x = c$ jusqu'à $x = b$; mais il est important d'observer que ce partage ne sera plus permis dans les cas d'exception où l'intégrale n'a plus la signification ordinaire. Pour rendre cette différence sensible par un exemple très-simple, soient les deux intégrales

$$y = \int \frac{dx}{1 + x^2}, \quad z = \int \frac{dx}{1 - x^2},$$

à prendre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$. Partageons-les chacune en deux parties, savoir :

$$y = \int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{du}{1+u^2};$$

$$z = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{du}{1-u^2};$$

les intégrales relatives à t étant prises depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$, et relatives à u, depuis $u=1$ jusqu'à $u=\frac{1}{0}$. On donnera à celles-ci les mêmes limites qu'aux premières, en faisant

$$u = \frac{1}{t}, \quad du = -\frac{dt}{t^2},$$

et changeant leur signes; en sorte qu'on aura, en intégrant depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$,

$$y = \int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \text{ arc } (\text{tang.} = t) = \frac{\pi}{2},$$

$$z = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} = 0.$$

La valeur de y est exacte, mais celle de z ne l'est pas; car on a

$$z = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2} \log. \frac{x+1}{x-1};$$

et en passant à l'intégrale définie prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$, il vient $z=-\frac{1}{2}\log.(-1)$. Ainsi, le partage de l'intégrale $\int \frac{dx}{1-x^2}$ en deux parties, ne peut pas se faire comme celui de l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x^2}$, ce qui tient à ce que la première n'est point une véritable somme, à moins qu'on ne suppose les valeurs intermédiaires de x imaginaires, auquel cas cette variable ne passera plus par la valeur $x=1$.

[37.] Les intégrales $\int \frac{dx}{1-x^2}$ et $\int \frac{dx}{x}$ du numéro précédent et du n.° 33, ont, comme on voit, des valeurs imaginaires; il en sera de

même, et pour la même raison, de toute intégrale $\int fx dx$, dans laquelle fx ne deviendra qu'une seule fois infinie entre les limites de l'intégration, et cela à cause d'un diviseur simple, ou élevé seulement à la première puissance. D'après cela, les intégrales

$$\int \frac{\cos. a x . dx}{x^2 - b^2}, \quad \int \frac{x \sin. a x . dx}{x^2 - b^2}, \quad \int \frac{x \sin. x . dx}{\cos. \theta - \cos. x},$$

que nous avons exclues de celles dont il a été question dans les n.os 3 et 16, devront être regardées comme des quantités imaginaires; c'est, en effet, ce que nous allons démontrer.

Considérons d'abord l'intégrale

$$y = \int \frac{2 x \sin. x . dx}{e^a + e^{-a} - 2 \cos. x},$$

prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, laquelle est semblable à celles du n.° 16. En développant suivant les puissances de l'exponentielle e^{-a}, dont la base est celles des logarithmes népériens, et en supposant que l'exposant a soit une quantité positive, ou une quantité composée d'une partie imaginaire et d'une partie réelle et positive, on aura, en série convergente,

$$\frac{e^{-a} \sin. x}{1 - 2 e^{-a} \cos. x + e^{-2a}} = \Sigma e^{-ia} \sin. i x;$$

i étant un nombre entier et positif, et la caractéristique Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \frac{1}{0}$. On conclut de là

$$y = 2 \Sigma e^{-ia} \left(\int x \sin. i x . dx \right);$$

mais, en intégrant à l'ordinaire, on a

$$\int x \sin. i x . dx = - \frac{x \cos. i x}{i} + \frac{\sin. i x}{i^2};$$

et passant aux limites $x = 0$, $x = \pi$, il vient

$$\int x \sin. i x . dx = -\frac{(-1)^i \pi}{i};$$

et par conséquent,

$$y = -2\pi \Sigma \frac{(-1)^i e^{-ia}}{i} = 2\pi \log. (1 - e^{-a});$$

résultat qui s'accorde avec celui du n.° 16.

On y peut faire $a = a' + \theta \sqrt{(-1)}$, a' et θ étant des quantités réelles, et a' étant supposée positive. On pourra prendre cette quantité a' aussi petite que l'on voudra ; en la faisant infiniment petite, la valeur de y sera la même que si on la faisait tout-à-fait nulle ; ainsi l'on peut mettre simplement $\theta \sqrt{(-1)}$ à la place de a, ce qui donne

$$y = \int \frac{x \sin. x . dx}{\cos. \theta - \cos x} = 2\pi \log. [1 - \cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{(-1)}];$$

valeur imaginaire, comme nous l'avons annoncé.

[38.] Soit maintenant,

$$y = \int \frac{\cos. ax - \cos. ab}{x^2 - b^2} . dx;$$

l'intégrale étant prise depuis $x = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$. Il nous sera facile ensuite d'en conclure l'intégrale

$$\int \frac{\cos. a x . dx}{x^2 - b^2},$$

prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$: dans ces deux intégrales, a et b sont des constantes réelles et positives.

L'intégrale y se décompose en deux autres, savoir :

$$y = \frac{1}{2b} . \int \frac{\cos. ax - \cos. ab}{x - b} . dx - \frac{1}{2b} . \int \frac{\cos. ax - \cos. ab}{x + b} . dx;$$

je mets à la place de x, $x + b$ dans la première et $x - b$ dans la

seconde, ce qui ne change rien à leurs limites; on aura alors en réduisant

$$y = -\frac{\sin. ab}{b} . \int \frac{\sin. ax}{x} . dx.$$

Or, a étant une quantité positive, on a (n.° 2)

$$\int \frac{\sin. ax}{x} . dx = \pi,$$

pour les limites $x = -\frac{1}{0}$ et $x = +\frac{1}{0}$; d'où il résulte

$$y = \int \frac{\cos. ax - \cos. ab}{x^2 - b^2} . dx = -\frac{\pi \sin. ab}{b}.$$

Observons maintenant que le coefficient de dx sous le signe $\int$, ne devenant infini pour aucune valeur réelle de x, il en résulte que l'intégrale est la somme des valeurs de la différentielle ; de plus, ces valeurs étant les mêmes et de mêmes signes pour des valeurs de x égales et de signes contraires, il s'ensuit que l'intégrale prise depuis $x = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $x = +\frac{1}{0}$, est double de cette même intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$; pour ces dernières limites, on aura donc

$$\int \frac{\cos. ax - \cos. ab}{x^2 - b^2} . dx = -\frac{\pi}{2b} . \sin. ab.$$

Or, en intégrant toujours depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$, on a

$$\int \frac{dx}{x^2 - b^2} = \frac{1}{2b} . \log. \frac{x-b}{x+b} = -\frac{1}{2b} . \log. (-1);$$

multipliant donc cette équation par cos. ab, et l'ajoutant ensuite à la précédente, il en résultera

$\int$

$$\int \frac{\cos. ax . dx}{x^2 - b^2} = -\frac{\pi}{2b} . \sin. ab - \frac{1}{2b} . \cos. ab . \log. (-1).$$

En différenciant par rapport à a, on aura en même temps

$$\int \frac{x \sin. ax . dx}{x^2 - b^2} = \frac{\pi}{2} \cos. ab - \frac{1}{2} \sin. ab . \log. (-1).$$

Ces deux intégrales sont celles que nous voulions déterminer; leurs valeurs sont imaginaires, comme nous l'avions prévu, ce qui tient à ce que les quantités sous le signe $\int$ deviennent infinies pour $x = b$, et seulement dans ce cas. L'imaginaire disparaît dans la première, quand ab est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, et dans la seconde, lorsque ce produit est un multiple de π; et, en effet, dans ces cas particuliers, les quantités sous le signe $\int$ ne deviennent plus infinies ni pour $x = b$, ni pour aucune autre valeur positive de x.

Parmi les valeurs en nombre infini et toutes imaginaires de log. (-1), si l'on prend log. $(-1) = \pi \sqrt{(-1)}$, on aura

$$\int \frac{b \sqrt{(-1)} . \cos. ax . dx}{x^2 - b^2} = \int \frac{x \sin. ax . dx}{x^2 - b^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ab\sqrt{(-1)}};$$

résultat remarquable en ce qu'il se déduit des valeurs connues de

$$\int \frac{b \cos. ax . dx}{x^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{x \sin. ax . dx}{x^2 + b^2},$$

en y mettant simplement $b\sqrt{(-1)}$ à la place de b.

[39.] L'intégrale étant regardée comme la somme des valeurs de la différentielle, entre les limites de l'intégration, il s'ensuit que si la variable va d'une limite à l'autre par différentes suites de valeurs réelles, l'intégrale ne devra pas changer; ce qui revient à dire, en représentant l'intégrale par l'aire d'une courbe, que cette aire sera la même, soit que l'on partage la différence des abscisses extrêmes en un nombre

infini de parties égales, soit qu'on la divise en une infinité de parties inégales suivant une loi quelconque. Mais si la variable passe d'abord par une série de valeurs réelles et ensuite par une série de valeurs imaginaires, il n'est pas impossible que la valeur de l'intégrale soit différente dans ces deux hypothèses, et que néanmoins elle soit réelle dans le second cas aussi bien que dans le premier. Supposons qu'il s'agisse de l'intégrale $\int fx dx$, prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, a et b étant des quantités réelles; qu'on y fasse $x=\phi t$, et qu'elle se change par-là en $\int Ft dt$; supposons, de plus, que a' et b' soient des valeurs réelles de t, correspondantes aux limites a et b, en sorte qu'on ait

$$a=\phi a', \quad b=\phi b':$$

si ϕt est réelle pour toutes les valeurs de t comprises entre $t=a'$ et $t=b'$, l'intégrale $\int Ft dt$, prise entre ces limites, sera la même que $\int fx dx$, prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$; au contraire, ces deux intégrales pourront être différentes, et nous allons donner des exemples dans lesquels elles le sont en effet, lorsque les valeurs intermédiaires de ϕt seront imaginaires; c'est-à-dire que l'intégrale $\int fx dx$ ne sera pas la même selon que la variable passera de $x=a$ à $x=b$ par une suite de valeurs réelles, ou qu'elle ira de l'une à l'autre limite par une série de valeurs imaginaires dont la loi est exprimée par ϕt.

Cette remarque, qui, ce me semble, n'avait pas encore été faite, était nécessaire pour prévenir les difficultés que pourrait présenter l'usage des quantités imaginaires dans la théorie des intégrales définies. Nous allons l'éclaircir par des exemples.

[40.] En premier lieu, considérons l'intégrale

$$\int \frac{\cos. ax . dx}{b^2 + x^2},$$

prise depuis $x = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $x = +\frac{1}{0}$, et dans laquelle a et b sont des quantités constantes et réelles. Soit

$$x = t + k\sqrt{(-1)},$$

t étant une nouvelle variable, et k une constante, qu'on suppose aussi réelle : les limites relatives à t seront encore $t = -\frac{1}{0}$ et $t = +\frac{1}{0}$; et si nous désignons par y ce que devient l'intégrale définie, nous aurons

$$y = \int \frac{(e^{ak} + e^{-ak}) \cos. at - (e^{ak} - e^{-ak}) \sin. at.\sqrt{(-1)}}{2[b^2 + t^2 - k^2 + 2kt\sqrt{(-1)}]} . dt.$$

Si l'on avait $k = b$, la fonction soumise à l'intégration deviendrait infinie pour la valeur de $t = 0$; mais nous supposerons k différent de b, et alors cette fonction ne deviendra infinie pour aucune valeur réelle de t.

En faisant disparaître les imaginaires du dénominateur sous le signe $\int$, il vient

$$y = \int \frac{(e^{ak} + e^{-ak})(b^2 - k^2 + t^2) \cos. at - 2(e^{ak} - e^{-ak}) kt \sin. at}{2(b^2 - k^2 + t^2)^2 + 8k^2t^2} . dt$$

$$+ \int \frac{2(e^{ak} + e^{-ak}) kt \cos. at - (e^{ak} - e^{-ak})(b^2 - k^2 + t^2) \sin. at}{2(b^2 - k^2 + t^2)^2 + 8k^2t^2} . dt\sqrt{(-1)}.$$

La seconde intégrale est nulle, parce qu'elle se compose d'élémens qui sont deux à deux égaux et de signes contraires, et qu'il est permis de la regarder comme la somme de ces élémens, puisque le coefficient de dt ne devient infini pour aucune valeur réelle de t. Les élémens de la première sont deux à deux égaux et de même signe ; en sorte qu'il suffira d'intégrer depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{0}$, et de doubler le résultat. Observant de plus que

$$(b^2 - k^2 + t^2)^2 + 4k^2t^2 = [t^2 + (b+k)^2]\,[t^2 + (b-k)^2];$$

nous aurons

$$y = (e^{ak} + e^{-ak})\int \frac{(b^2 - k^2 + t^2)\cos. at.dt}{[t^2 + (b+k)^2]\,[t^2 + (b-k)^2]}$$

$$- 2k\,(e^{ak} - e^{-ak})\int \frac{t\sin. at.dt}{[t^2 + (b+k)^2]\,[t^2 + (b-k)^2]};$$

ces deux nouvelles intégrales étant prises depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{0}$: En suivant le même procédé que pour l'intégration des fractions rationnelles, chacune d'elles se décomposera en deux autres, et de cette manière on aura

$$y = \frac{e^{ak} + e^{-ak}}{2b}.\int \frac{(b+k)\cos. at.dt}{t^2 + (b+k)^2}$$

$$+ \frac{e^{ak} + e^{-ak}}{2b}.\int \frac{(b-k)\cos. at.dt}{t^2 + (b-k)^2}$$

$$+ \frac{e^{ak} - e^{-ak}}{2b}.\int \frac{t\sin. at.dt}{t^2 + (b+k)^2}$$

$$+ \frac{e^{-ak} - e^{ak}}{2b}.\int \frac{t\sin. at.dt}{t^2 + (b-k)^2}.$$

Or, en regardant a, b et k comme des quantités positives, et supposant $k > b$, on a, par les formules connues,

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{(b+k)\cos. at.dt}{t^2 + (b+k)^2} &= \int \frac{t\sin. at.dt}{t^2 + (b+k)^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a(b+k)}, \\ \int \frac{(k-b)\cos. at.dt}{t^2 + (k-b)^2} &= \int \frac{t\sin. at.dt}{t^2 + (k-b)^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a(k-b)}; \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

et quand b surpasse k, les dernières équations doivent être remplacées par

$$\int \frac{(b-k)\cos. at.dt}{t^2 + (b-k)^2} = \int \frac{t\sin. at.dt}{t^2 + (b-k)^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a(b-k)}. \quad \text{(a')}$$

Substituant ces valeurs dans celle de y, il vient, toutes réductions faites,

$$y = \int \frac{\cos. a x . d x}{b^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 b} (e^{-ab} - e^{ab}),$$

lorsqu'on a $k > b$, et

$$y = \int \frac{\cos. a x . d x}{b^2 + x^2} = \frac{\pi}{b} e^{-ab},$$

quand on suppose $k < b$.

Le second résultat coïncide avec la valeur connue de cette intégrale; mais la première valeur de y est, comme on voit, très-différente de la dernière. Ainsi, l'intégrale que y représente est susceptible de deux valeurs distinctes : l'une a lieu quand on passe de $x = -\frac{1}{0}$ à $x = +\frac{1}{0}$ par une suite de valeurs imaginaires de la forme $x = t + k\sqrt{(-1)}$, k étant $> b$; l'autre, quand les valeurs intermédiaires de x sont de la forme $x = t + k\sqrt{(-1)}$, k étant $< b$, ce qui comprend le cas ordinaire où toutes ces valeurs sont réelles et qui répond à $k = 0$.

[41.] Les équations (a) et (a′), dont nous venons de faire usage pour trouver ces deux valeurs de y, n'exigent pas que les exposans de e dans leurs seconds membres, soient réels : ils peuvent être composés d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, pourvu que la partie réelle soit toujours négative. Si donc on y met $b\sqrt{(-1)}$ à la place de b, et que l'on continue de regarder a et k comme des quantités positives, les équations (a) subsisteront encore, mais les équations (a′) n'auront plus lieu ; par conséquent, la première valeur de y qui résulte des équations (a) sera la seule qu'il faudra conserver, et l'on aura

$$y = \int \frac{\cos. ax.dx}{x^2 - b^2} = \frac{\pi}{2b\sqrt{(-1)}} (e^{-ab\sqrt{(-1)}} - e^{ab\sqrt{(-1)}}) = -\frac{\pi}{b} \sin. ab.$$

Si l'on fait $a = 0$, cette formule donne

$$\int \frac{dx}{x^2 - b^2} = 0;$$

ce qu'il est aisé de vérifier; car on a

$$\int \frac{dx}{x^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \log. \frac{x - b}{x + b};$$

quantité nulle aux deux limites $x = -\frac{1}{0}$ et $x = +\frac{1}{0}$. On conclura de là, entre ces limites,

$$\int \frac{\cos. ax - \cos. ab}{x^2 - b^2} . dx = -\frac{\pi}{b} \sin. ab;$$

ce qui coïncide avec ce que nous avons déjà trouvé d'une manière différente dans le n.° 38.

[42.] Appliquons encore les mêmes considérations à l'intégrale

$$y = \int \frac{x \text{ tang. } ax . dx}{x^2 + b^2},$$

prise depuis $x = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$, et dans laquelle a et b sont des constantes réelles. Le coefficient de dx sous le signe $\int$ passe une infinité de fois par l'infini entre ces limites; mais on empêchera que cela soit, en mettant $t + k\sqrt{(-1)}$ à la place de x, ce qui ne changera rien aux limites de l'intégrale, qui seront toujours $t = -\frac{1}{0}$ et $t = +\frac{1}{0}$. On supposera k différent de b, afin que le dénominateur $x^2 + b^2$ ne devienne pas nul pour la valeur particulière $t = 0$.

Cela posé, on trouvera, après avoir fait disparaître les imaginaires du dénominateur,

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{2t \sin. 2at . dt}{[t^2 + (k-b)^2]\,T} = \frac{\pi e^{-2ak}}{e^{2a(k-b)} + e^{-2a}};\\ &\int \frac{(k-b)\,(e^{2ak} - e^{-2ak})\,dt}{[t^2 + (k-b)^2]\,T} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi e^{-2ak}}{e^{2a(k-b)} + e^{-2ak}};\end{aligned}\right\}\ (\text{b}')$$

la première partie de y se réduira à $\frac{\pi}{2}$, comme la seconde, et l'on aura pour sa valeur complète,

$$y = \int \frac{x \text{ tang. } ax . dx}{x^2 + b^2} = \pi.$$

Si, au contraire, c'est b qui surpasse k, on aura

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{2t . \sin. 2at . dt}{[t^2 + (b-k)^2]\,T} = \frac{\pi e^{-2ak}}{e^{2a(b-k)} + e^{-2ak}} = \frac{\pi}{e^{2ab} + 1},\\ &\int \frac{(b-k)(e^{2ak} - e^{-2ak})dt}{[t^2 + (b-k)^2]\,T} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi e^{-2ak}}{e^{2a(b-k)} + e^{-2ak}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e^{2ab} + 1};\end{aligned}\right\}\ (\text{b}'')$$

la première ligne de la valeur de y sera égale à

$$\frac{\pi}{e^{2ab} + 1} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e^{2ab} + 1}\right);$$

et sa valeur entière deviendra

$$y = \int \frac{x \text{ tang. } ax . dx}{x^2 + b^2} = \frac{2\pi}{e^{2ab} + 1}.$$

L'intégrale représentée par y a donc aussi deux valeurs distinctes. La seconde s'accorde avec la valeur de la même intégrale, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$, que M. Bidonni a trouvée d'une autre manière (*). La première en diffère essentiellement; et cette différence tient à celle des valeurs de x entre les limites de l'intégration. Quand

(*) *Memoires* de Turin, année 1812.

$b = 0$, ces deux valeurs coïncident ensemble, on a alors

$$\int \frac{\text{tang. } a x \, . \, d x}{x} = \pi;$$

formule qui suppose a positif, et qui n'a pas lieu quand $a = 0$. Il est remarquable que la valeur de cette intégrale soit la même que celle de

$$\int \frac{\text{sin. } a x \, . \, d x}{x},$$

entre les mêmes limites $x = -\frac{1}{0}$ et $x = +\frac{1}{0}$.

La remarque du n.° précédent s'applique également aux intégrales dont nous nous occupons maintenant : si l'on suppose que b devienne imaginaire, et qu'on le remplace par $b\sqrt{(-1)}$, les équations (b) et (b′) subsisteront encore, k et a étant toujours des quantités positives ; mais les équations (b″) n'auront plus lieu, en sorte que y ne conservera plus que sa première valeur, savoir :

$$y = \int \frac{x \text{ tang. } a x \, . \, d x}{x^2 - b^2} = \pi.$$

Les limites de cette intégrale sont $x = -\frac{1}{0}$ et $x = +\frac{1}{0}$; mais on aurait tort d'en conclure qu'elle se réduit à moitié et devient égale à $\frac{\pi}{2}$, quand on intègre seulement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$; car nous allons faire voir que, relativement à ces dernières limites, la valeur de cette intégrale est imaginaire.

[43.] Pour plus de généralité, considérons l'intégrale

$$y = \int \frac{2 x \text{ sin. } 2 a x \, . \, d x}{(x^2 - b^2)(1 - 2\alpha \, . \, \text{cos. } 2 a x + \alpha^2)},$$

prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{0}$, laquelle comprend la précédente, en y faisant $\alpha = -1$. Supposons d'abord cette constante positive ou négative, mais plus petite que l'unité, abstraction faite du signe ; nous

aurons, en série convergente,

$$\frac{\sin. 2ax}{1-2\alpha\cos. 2ax+\alpha^2}=\Sigma\,\alpha^{i-1}\sin. 2iax;$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\frac{1}{0}$. D'après cela, nous aurons

$$y=\Sigma\,\alpha^{i-1}\int\frac{2x\sin. 2iax}{x^2-b^2}.dx;$$

mais nous avons trouvé [n.° 38],

$$\int\frac{x\sin. 2iax}{x^2-b^2}.dx=\frac{\pi}{2}\cos. iab-\frac{1}{2}\sin. iab.\log.(-1);$$

il en résulte donc

$$y=\pi\,\Sigma\,\alpha^{i-1}\cos. iab-\log.(-1).\Sigma\,\alpha^{i-1}\sin. iab:$$

on a d'ailleurs

$$\Sigma\,\alpha^{i-1}\cos. iab=\frac{1}{2\alpha}.\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos. ab+\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha},$$

$$\Sigma\,\alpha^{i-1}\sin. iab=\frac{\sin. ab}{1-2\alpha\cos. ab+\alpha^2};$$

on aura donc enfin

$$y=-\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha}.\frac{(1-\alpha^2)\pi-2\alpha\sin. ab.\log.(-1)}{1-2\alpha.\cos. ab+\alpha^2}.$$

Maintenant, si l'on fait $\alpha=-1$, cette valeur de y devient

$$y=\int\frac{x\,\text{tang}. ax.dx}{x^2-b^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\log.(-1)}{2}.\text{tang}.\frac{ab}{2};$$

et à cause de $\log.(-1)$, on voit que notre intégrale a en général une infinité de valeurs qui sont toutes imaginaires : il n'y a d'exception que quand $\frac{ab}{2}$ est un multiple quelconque de π, ce qui fait disparaître

log. (-1), et réduit l'expression de y à $\frac{\pi}{2}$.

[44.] Nous avons supposé plusieurs fois, dans les numéros précédens, que la formule connue

$$\int \frac{\cos. ax.dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ab},$$

subsistait encore lorsque b est composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, pourvu que la partie réelle fût positive : cette extension a besoin de quelques éclaircissemens. Il ne suffirait pas, pour la justifier, de mettre bx à la place de x; car dans le cas de b imaginaire, cos. abx se changerait en exponentielles réelles, et l'intégrale ne serait plus de la même nature; mais on peut recourir à l'analyse du n.° 3, qui s'applique également à ce nouveau cas.

Soit donc

$$y = \int \frac{\cos. ax.dx}{[b+c\sqrt{(-1)}]^2 + x^2};$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$, et a, b, c désignant des constantes réelles. La constante c pourra être nulle; mais on supposera que b ne le soit point, afin de ne pas retomber sur l'intégrale dont nous nous sommes occupés dans le n.° 38, et que nous excluons maintenant.

En différenciant y deux fois de suite par rapport à a, on formera aisément l'équation

$$\frac{d^2 y}{da^2} - [b+c\sqrt{(-1)}]^2\, y = \int \cos. ax.dx;$$

or, pour les limites $x=0$ et $x=\frac{1}{0}$, on a $\int \cos. ax.dx = 0$; on aura donc, pour déterminer y, l'équation

$$\frac{d^2 y}{da^2} - [b+c\sqrt{(-1)}]^2\, y = 0.$$

Cependant, il faut observer qu'on a $\int \cos. ax.dx = 0$ pour toutes les valeurs réelles de a, excepté pour $a=0$; cas dans lequel il est évident qu'on a, au contraire, $\int \cos. ax.dx = \frac{1}{0}$: il ne faudra donc pas supposer d'avance que ce cas particulier soit compris dans les valeurs de y et $\frac{dy}{da}$ en fonctions de a qu'on va déterminer.

En intégrant l'équation précédente, on a

$$y = Ae^{-a(b+c\sqrt{-1})} + Be^{a(b+c\sqrt{-1})};$$

A et B étant les deux constantes arbitraires. Or, à l'inspection de l'intégrale représentée par y, on voit que soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de sa valeur ne saurait devenir infinie, ni croître indéfiniment en même temps que a, du moins quand on suppose, comme nous le faisons ici, que la variable x ne reçoit que des valeurs réelles; si donc nous regardons les quantités a et b comme positives, il faudra que la seconde exponentielle disparaisse de l'expression de y; il faudra donc qu'on ait $B=0$, ce qui réduit cette expression à

$$y = Ae^{-a(b+c\sqrt{-1})}.$$

Pour déterminer la constante A, je différencie y par rapport à a; et remettant pour y l'intégrale qu'elle représente, il vient

$$\int \frac{x \sin. ax.dx}{(b+c\sqrt{-1})^2+x^2} = A(b+c\sqrt{-1})\,e^{-a(b+c\sqrt{-1})}.$$

Maintenant, je suppose que a devienne, non pas nulle, mais infiniment petite; pour voir ce que devient alors cette dernière intégrale, je mets $\frac{x}{a}$ à la place de x; les limites restent toujours les mêmes, et l'on a

$$\int \frac{x \sin. ax.dx}{(b+c\sqrt{-1})^2+x^2} = \int \frac{x \sin. x.dx}{a^2(b+c\sqrt{-1})^2+x^2};$$

or, dans le cas de a infiniment petite, le second membre de cette équation se réduit à

$$\int \frac{\sin. x . dx}{x},$$

et celui de la précédente à $A[b + c\sqrt{(-1)}]$; on aura donc [n.° 2]

$$A\,(b + c\sqrt{-1}) = \int \frac{\sin. x . dx}{x} = \frac{\pi}{2};$$

tirant de là la valeur de A, et la substituant dans celles de y et $\frac{dy}{da}$, il en résulte

$$y = \int \frac{\cos. ax . dx}{(b + c\sqrt{-1})^2 + x^2} = \frac{\pi\, e^{-a(b + c\sqrt{-1})}}{2\,(b + c\sqrt{-1})},$$

$$\int \frac{x \sin. ax . dx}{(b + c\sqrt{-1})^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a(b + c\sqrt{-1})}.$$

On peut remarquer que le premier de ces deux résultats subsiste encore pour $a = 0$, tandis que le second n'a plus lieu dans ce cas particulier.

Au moyen de ces deux formules et de celles du n.° 38, on pourra déterminer entre les limites $x = 0$ et $x = \frac{1}{0}$, les valeurs des intégrales comprises sous cette forme :

$$\int \frac{(P \cos. ax + Q x \sin. ax)\, dx}{R};$$

P, Q, R étant des polynomes qui ne renferment que des puissances paires de x, et R étant d'un degré plus élevé que P et Q. On suivra, pour cela, le procédé de l'intégration des fractions rationnelles; mais on n'aura pas besoin de décomposer le dénominateur R en facteurs réels, ni de supposer, comme dans le n.° 7, que l'équation $R = 0$ ne donne pour x^2 aucune valeur réelle et positive.



MÉMOIRE

SUR L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE

A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. POINSOT.

Lu à l'Académie des Sciences, le 27 Avril 1818.

I.

DANS le Mémoire rapide que j'ai lu dernièrement à l'Académie, et où j'ai donné une idée générale de mes recherches nouvelles sur l'algèbre et sur la théorie des nombres, j'ai considéré particulièrement les racines imaginaires de l'unité, c'est-à-dire, ces différentes expressions radicales qui produisent toutes également l'unité pour résultat, quand on les élève à la puissance marquée par le degré ou l'exposant de ces racines. D'un autre côté, j'ai considéré ces différens nombres entiers qui donnent tous également l'unité pour reste, quand on les élève à la même puissance, et qu'on les divise par un nombre premier quelconque, auquel on veut les rapporter, comme à une espèce de base ou de *module*. J'ai observé les propriétés analogues de ces nombres entiers et de ces racines imaginaires; et, suivant jusqu'au bout cette analogie, j'ai avancé que la formule générale qui résout l'équation binome $x^n - 1 = 0$, est, dans le sens que je vais dire, la représentation analytique de chacun des

nombres entiers qui résolvent l'équation semblable, $x^n - 1 = Mp$, mais où le second membre, au lieu d'être nul, désigne un multiple du nombre premier p ou du module que l'on considère.

Ce théorème remarquable est la base de toute la théorie des *résidus des puissances*, et je me propose d'en donner ici une démonstration générale; mais auparavant il convient d'en éclaircir encore l'énoncé, et d'en pénétrer le véritable sens.

Et d'abord, il est clair qu'entre ces nombres entiers et ces racines imaginaires, il ne s'agit point d'une égalité absolue, ce qui serait absurde, mais bien d'une égalité relative à ce module premier p, que l'on sous-entend toujours dans les expressions. Cette égalité consiste proprement dans celle des restes que laisseraient les deux membres relativement à ce module; de manière qu'en l'ajoutant une ou plusieurs fois aux divers nombres qui se trouvent engagés dans la proposée, on rendrait les deux membres parfaitement égaux entre eux, et que cette égalité relative dont nous parlions deviendrait une égalité absolue.

Ainsi, relativement au module premier 5, par exemple, vous pouvez égaler le radical imaginaire $\sqrt{-1}$, aux deux nombres entiers 2 ou -2, et poser l'équation $\sqrt{-1} = \pm 2$: car en ajoutant à -1 qui est sous le radical, le module 5, il vient un carré parfait 4, dont la racine est ± 2 ; et l'on a ainsi, $\sqrt{-1} = \pm 2$, ou, si l'on veut, 2 et 3, le module 5 étant sous-entendu.

Relativement au module 13, la même expression imaginaire $\sqrt{-1}$ vous donnerait les deux nombres ± 5 ; parce qu'en ajoutant à -1 deux fois le module 13, il viendrait, sous le radical, le carré parfait 25, dont la racine est ± 5.

De même, vous pouvez égaler la racine cubique imaginaire de l'unité $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ aux nombres entiers 4 ou 2, relativement au module 7; car $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ reviendrait à $\frac{-1+7+\sqrt{(-3+7)}}{2}$, qui donne 4 ou 2 par l'ambiguité du radical. Si le module était 19, la même expression vous donnerait 11 et 7; et ainsi des autres.

C'est dans ce sens qu'il faut entendre cette espèce d'égalité que je considère, et qui devient une égalité absolue, en restituant certains multiples du module aux divers nombres qui entrent dans la proposée, et qui s'y trouvent engagés sous des signes quelconques d'opérations. Sous ce point de vue donc, je dis que l'expression algébrique imaginaire qui rend nul le binome $x^n - 1$, représente les divers nombres entiers qui rendent ce même binome multiple d'un nombre premier p; et même, qu'elle représente ces entiers dans tous les cas possibles, c'est-à-dire quel que soit le module premier p, auquel on voudrait rapporter l'équation $x^n - 1 = Mp$. C'est en cela sur-tout que consistent la nouveauté et l'étendue de notre théorème : car on n'aperçoit aucune relation, ni entre les divers nombres qui résolvent la proposée pour un module particulier, ni entre les différentes classes des nombres qui la peuvent résoudre pour des modules différens; et pourtant nous voyons que tous ces nombres sont réductibles à une même expression imaginaire, composée de nombres actuellement déterminés et connus, qui ne dépendent point des modules, mais uniquement du degré de la proposée. Cette réduction si frappante, cette même représentation analytique de tant de nombres différens, et qui ne paraissent soumis à aucune loi, nous indique de nouvelles routes dans l'analyse indéterminée, et nous offre, comme on l'a dit, le premier et singulier exemple de l'application de l'algèbre à la théorie des nombres.

Au reste, ce théorème sur les équations binomes n'est qu'un cas particulier d'un théorème général, qui s'étend à une équation quelconque, rapportée de même à un nombre premier dont elle renfermerait des multiples indéterminés. On peut dire également que les nombres entiers qui résolvent la proposée, sont analytiquement représentés par la formule générale qui résout cette même équation, mais déterminée, en y faisant nuls par-tout ces multiples du nombre premier ou module que l'on considère. Nous pourrions donc nous appliquer d'abord à démontrer cette proposition générale, pour en déduire, comme un cas particulier, le théorème qui nous occupe : mais la matière est neuve et délicate; les équations binomes, les seules d'ailleurs qu'on sache résoudre

forme

forment une classe assez étendue, et la théorie en est assez importante pour que j'en fasse le principal objet de ce Mémoire. J'ai voulu même n'offrir ici qu'une démonstration tirée de l'analyse la plus familière. Je cherche la résolution générale de l'équation indéterminée $x^n - 1 = Mp$, à l'imitation parfaite de la résolution générale de l'équation binome $x^n - 1 = 0$. Je mets les racines de l'une et l'autre équations sous une forme toute semblable; et notre théorème, si nouveau et si paradoxal en apparence, ne se présente plus alors que comme une sorte d'identité.

J'ai parlé aussi, dans mon premier Mémoire, de l'application qu'on peut faire de la formule des racines de l'unité, à la recherche de ces nombres remarquables qu'*Euler* a considérés pour chaque nombre premier, et qu'il en a nommés les *racines primitives*. Cette application s'offrait, pour ainsi dire, d'elle-même; car, dans notre théorie, les racines primitives d'un nombre premier p, doivent être représentées par les racines imaginaires de l'équation binome, $x^{p-1} - 1 = 0$, en prenant celles qui, par leurs puissances successives, sont propres à fournir la suite complète de toutes les racines différentes de la proposée. Il y a, comme on sait, autant de ces racines imaginaires *primitives*, qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à $p - 1$: or, chacune d'elles doit répondre à une racine primitive du nombre p, et peut servir à la faire connaître. Mais il est bon de prévenir une difficulté qu'on pourrait élever sur le principe même de cette application.

Et en effet, on pourrait dire que la méthode suivie pour résoudre l'équation binome $x^n - 1 = 0$, suppose la connaissance d'une racine primitive du nombre n; que, par conséquent, on fait une espèce de cercle vicieux, quand on emploie les racines des équations binomes à la recherche des racines primitives, puisque ces équations, pour être résolues, supposent elles-mêmes l'emploi des racines primitives. Mais cette difficulté s'évanouit à la première réflexion. Car supposons qu'il s'agisse de trouver une racine primitive du nombre premier p. Suivant notre méthode, il s'agirait donc d'avoir une racine imaginaire primitive

de l'équation binome $x^{p-1} - 1 = 0$. Or, cette équation d'un degré composé $p - 1$, ne demande pour être résolue que la résolution d'équations binomes inférieures, telles que $x^{\alpha} - 1 = 0$, α étant un diviseur premier du nombre $p - 1$. Et si la résolution de celle-ci demande l'emploi d'une racine primitive de α, cette racine primitive se trouverait de même par les racines de l'équation inférieure $x^{\alpha-1} - 1 = 0$: et ainsi de suite. D'où l'on voit que, pour trouver une racine primitive du nombre premier p, il suffit d'avoir celles des diviseurs premiers de $n - 1$, qui sont déjà censées connues, ou, si l'on veut, qu'on trouverait également par les racines primitives des nombres premiers inférieurs; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on redescendît aux plus petits nombres premiers possibles, c'est-à-dire, à l'unité, qui est elle-même sa racine primitive. Ainsi l'application de la formule des racines imaginaires de l'unité, à la détermination des racines primitives d'un nombre premier, n'est point du tout illusoire, quoiqu'on n'obtienne facilement cette formule qu'à l'aide d'autres racines primitives. Ce n'est pas que je donne cette application comme très-avantageuse dans la pratique; car on peut souvent obtenir les racines primitives d'une manière bien plus prompte, par le simple tâtonnement : et c'est à-peu-près ce qui arrive dans toutes les applications de nos formules d'algèbre. Mais il ne s'agit point ici de calculs et de résultats particuliers ; nous n'étudions que la théorie et les méthodes générales, dans la seule vue des progrès et de la dignité de la science.

Mais il y a une remarque plus importante à faire sur la résolution générale de l'équation binome, $x^n - 1 = 0$, ou plutôt de l'équation réciproque, $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \&c. + x + 1 = 0$, qu'on en tire, en dégageant le facteur linéaire $x - 1$.

Il est bien vrai que cette résolution ne peut être exposée d'une manière claire et rapide, sans ranger d'abord les racines dans cet ordre lumineux où M. *Gauss* les a considérées pour la première fois, et dans lequel les exposans successifs de la lettre commune qui les représente, au lieu de

former la suite naturelle des nombres, forment la suite naturelle des puissances d'une racine primitive du nombre premier *n*. Cette idée est très-heureuse ; et, quoiqu'elle paraisse indirecte, il faut convenir qu'elle met la solution du problème dans tout son jour. Mais il ne s'ensuit pas pourtant que l'équation binome n'aurait pu être résolue sans l'emploi des racines primitives, dont la considération peut même nous sembler étrangère. J'observe que la méthode de *Lagrange*, ou celle de *Vandermonde*, pouvait être appliquée à cette équation, et même à toutes les réduites qui en proviennent, et que, dans son analyse, M. *Gauss* a nommées *équations auxiliaires;* et il serait facile de prouver que ces méthodes générales devaient nécessairement réussir, par les propriétés mêmes des racines qu'il s'agit de déterminer. Et en effet, ces racines, au lieu d'être indépendantes l'une de l'autre, comme dans les équations générales, se trouvent liées par une relation mutuelle nécessaire, qui permet de les représenter toutes à l'aide d'une même lettre et de divers exposans. Et de là il résulte que, dans une fonction quelconque de ces racines, il n'est pas possible de changer une racine en une autre, sans opérer entre toutes les racines une permutation simultanée. Le nombre de toutes les permutations possibles, et partant le nombre de toutes les valeurs de la fonction, se réduit donc simplement au nombre des racines ; et le degré de la Résolvante, qui s'élève si haut pour les équations où les racines sont indépendantes, ne peut passer ici le degré de la Proposée même. Mais de plus cette résolvante peut devenir simplement une équation à deux termes, par la nature de la fonction des racines qu'on aura choisie ; et de cette manière, la proposée sera résolue. Je me contente d'indiquer ici cette méthode, que je tâcherai d'éclaircir et d'expliquer ailleurs plus en détail. Mais ce développement n'est pas même nécessaire pour la remarque générale que j'ai ici en vue ; car, indépendamment de cette théorie et de ces propriétés des racines, qu'il semble que *Vandermonde* ne connaissait pas encore, nous voyons que cet habile géomètre est venu à bout de faire l'application de sa méthode générale et d'en donner le résultat pour l'équation binome du 11.me degré, qu'on n'avait jamais

pu résoudre avant lui ; et dans son Mémoire, il avance expressément que sa méthode s'applique aux équations semblables de tous les degrés : de sorte que, malgré l'obscurité de sa méthode et la longueur de ses calculs, *Vandermonde* doit être regardé à juste titre comme le premier auteur de cette belle découverte en algèbre.

Cette remarque ne diminue en rien le mérite de la théorie neuve et profonde que l'on doit à M. *Gauss*, et sans laquelle la découverte de *Vandermonde* serait peut-être encore ignorée ; mais elle prouve que la résolution générale des équations binomes a pu être obtenue sans la considération actuelle des racines primitives, et que, par conséquent, nous aurions pu nous-mêmes en affranchir notre analyse. Cependant, comme cette considération ingénieuse, bien loin d'être étrangère à la résolution des équations, est puisée, au contraire, dans la nature du problème, lequel dépend essentiellement de la théorie des permutations simultanées, j'ai cru devoir l'employer sans difficulté dans la démonstration suivante, et je présente d'abord le théorème par cette analyse, afin qu'il paraisse dans toute son évidence.

Quant à notre démonstration considérée en elle-même, on verra qu'elle réside, au fond, bien plutôt dans la supposition d'une formule générale qui résoudrait la proposée, que dans la manière de parvenir à cette formule; et même les géomètres sentiront d'abord comment le théorème que je propose s'étendrait à une équation complète, dont la résolution algébrique serait supposée connue. Il suffirait de considérer que les coefficiens de cette équation sont les mêmes, aux multiples près du module, que ceux de l'équation semblable déterminée qui auraient les mêmes racines ; que par conséquent la formule générale qui résoudrait la première équation, conviendrait à la seconde, en restituant aux coefficiens les multiples du module, et nous donnerait ainsi les racines entières de la proposée. Mais il était bon de commencer par la résolution des équations binomes, parce qu'elle est comme la clef de toutes les autres ; parce qu'elle seule peut nous faire connaître la nature intime des radicaux; signes remarquables, qui font l'essence de

l'algèbre, par cette ambiguïté même qui en est inséparable, et dont l'emploi dans nos démonstrations mathématiques, marque la différence la plus précise entre l'Analyse et la Synthèse.

II.

THÉORÈME.

1. Considérons donc l'équation binome indéterminée, $x^n - 1 = Mp$, où Mp désigne un multiple quelconque du nombre premier p, et n un exposant quelconque premier, que je supposerai d'abord diviseur de $p-1$, afin que l'équation $x^n - 1 = Mp$ ait n racines ou solutions en nombres entiers inférieurs à p. Je dis que si l'on prend, à la place de cette équation indéterminée, l'équation binome déterminée $x^n - 1 = 0$, et qu'on la résolve, l'expression algébrique de ses n racines, qui, excepté l'unité, sont toutes imaginaires, sera la représentation analytique des n nombres entiers qui résolvent l'équation $x^n - 1 = Mp$; c'est-à-dire qu'en ajoutant aux nombres qui sont sous les divers radicaux de cette formule imaginaire, des multiples convenables de p, on fera disparaître les imaginaires et les irrationnelles, on rendra toutes les opérations indiquées parfaitement exécutables, et l'on parviendra précisément aux n nombres entiers qui satisfont à la proposée

$$x^n - 1 = Mp.$$

2. Pour démontrer ce théorème, remarquez d'abord que l'équation $x^n - 1 = Mp$ a toujours la racine $x = 1$, comme l'équation binome $x^n - 1 = 0$: dégageant donc cette racine ou le facteur $x - 1$ du premier membre, nous aurons l'équation indéterminée

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \&c. + x + 1 = Mp,$$

dont toutes les racines sont des nombres entiers supérieurs à l'unité.

Or, soit r un quelconque de ces nombres; il est facile de voir que tous les autres pourront être représentés par les puissances successives r^2, r^3, r^4, &c. r^{n-1} de celui-là. Et en effet, toutes ces puissances seront des nombres différens relativement à p, parce que n est un nombre premier; et il est clair qu'elles satisferont toutes à la proposée $x^n - 1 = Mp$, puisque r y satisfait par hypothèse.

Ces puissances r^2, r^3, r^4, &c. r^{n-1} pourront s'élever au-dessus du nombre premier p; mais cela est indifférent pour notre objet, puisque, rabaissées au-dessous de p par la division, elles rameneraient pour restes les racines mêmes de la proposée. Ainsi, au lieu de ces racines inférieures à p, il nous est permis de prendre les puissances successives d'une seule d'entre elles : et, de plus, nous pouvons les ranger dans l'ordre où les exposans forment les $n-1$ termes différens d'une progression géométrique a, a^2, a^3, a^4, &c. a^{n-1}, dans laquelle a est une racine primitive du nombre n. A la vérité, quelques-uns de ces nouveaux exposans de r s'élèvent au-dessus de n; mais, à cause de $r^n = 1$, aux multiples près de p, on peut n'y voir que les restes de leur division par n; et alors ils donnent dans un certain ordre les premiers exposans 1, 2, 3, 4, 5, &c. $n-1$, inférieurs à n; et ils les donnent tous, parce que a est supposé une racine primitive de n, c'est-à-dire, un nombre capable de ramener par ses puissances successives tous les résidus différens inférieurs à n.

De cette manière, les racines de la proposée, non-seulement sont représentées par les différentes puissances d'une *même* racine, mais encore elles sont rangées dans un ordre où chacune d'elles est une *même* puissance de celle qui la précède.

3. Remarquez, en passant, que cet ordre ingénieux, dont rien ne paraît d'abord nous indiquer le choix entre tous les autres, est au fond un ordre analytique déterminé par la nature même des choses. Car, comme il s'agit de racines qui jouissent toutes également de la même propriété, et qu'il n'y a aucune raison de préférer l'une à l'autre, il est

clair que l'ordre le plus naturel est celui qui conviendrait également à toutes les racines, et qui par conséquent ne changerait point, quelle que fût la racine r d'où l'on voulût partir. Ainsi, par la nature même de la question, on est porté à chercher, s'il est possible, un ordre où les racines naîtraient successivement l'une de l'autre par la même fonction, et où il serait alors indifférent d'y changer une racine en une autre quelconque à volonté. Or, c'est précisément ce qui a lieu dans la suite

$$r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ r^{a^4},\ \&c.,$$

qui nous présente chacune des racines comme une même puissance de celle qui la précède, et qui nous donne ainsi leur véritable ordre naturel.

Au contraire, l'ordre $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$, &c., qui nous semble naturel, a quelque chose d'irrégulier et d'arbitraire ; car si, après la racine que vous nommez r, vous mettez r^2, c'est-à-dire, le carré de cette première racine, il est clair qu'après r^2 vous devriez mettre aussi son carré r^4, et non pas la puissance r^3 ; et de même pour les suivantes. Ainsi, dans la suite $r,\ r^2,\ r^3,\ r^4$, &c., la loi se rompt à chaque instant ; et l'ordre même n'y est pas déterminé, car il dépend de la racine que vous choisirez pour r, et sera tout différent en employant une autre racine. Mais dans la première suite, aucun échange de racines ne pourra troubler l'ordre ; les racines ne feront que s'avancer toutes à-la-fois d'un même nombre de places, et elles garderont toujours entre elles la même disposition, exactement comme si elles étaient rangées en cercle.

Ainsi donc les $n-1$ nombres supérieurs à l'unité, qui satisfont à l'équation $x^n - 1 = Mp$, peuvent être naturellement représentés par la suite $r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3}$, &c. $r^{a^{n-2}}$, comme M. *Gauss* en a eu l'heureuse idée pour la représentation des racines imaginaires de l'équation binome $x^n - 1 = 0$; et nous voyons que cet ordre remarquable aurait pu être tiré directement de l'analyse du problème.

4. Cela posé, considérez, suivant la méthode de *Lagrange*, les $n-1$ fonctions linéaires,

$$r + r^{a} + r^{a^2} + r^{a^3} + \&c. = t,$$
$$r + \alpha r^{a} + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} + \&c. = t',$$
$$r + \beta r^{a} + \beta^2 r^{a^2} + \beta^3 r^{a^3} + \&c. = t'',$$
$$r + \gamma r^{a} + \gamma^2 r^{a^2} + \gamma^3 r^{a^3} + \&c. = t''',$$
&c. &c.

où 1, α, β, γ, &c. sont les racines de l'équation binome $x^{n-1} - 1 = 0$; il est clair que vous aurez, en ajoutant ces fonctions,

$$(n-1)\, r = t + t' + t'' + t''' + \&c.,$$

et que, par conséquent, le nombre entier r pourra être mis sous la forme:

$$r = \frac{t + t' + t'' + t''' + \&c.}{n-1};$$

ou bien encore, si vous faites les puissances $n-1$.mes des fonctions t, t' t'', t''', &c., ce qui donnera

$$(t)^{n-1} = \theta,\ (t')^{n-1} = \theta',\ (t'')^{n-1} = \theta'',\ (t''')^{n-1} = \theta''',\ \&c.;$$

et puis, d'un autre côté, que vous remettiez sur ces puissances le radical $n-1$.me, afin de ne rien changer; il est encore évident que le nombre r pourra être mis sous la forme :

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \&c.}{n-1},$$

qui est toute semblable à la formule générale des racines n.es de l'unité. (*Voyez* la note XIV de la Résol. des équat. numér. de *Lagrange*).

Il

$$\frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \&c.}{n - 1},$$

au lieu de répondre au nombre entier r, répondra exactement à une racine imaginaire de l'équation binome $x^n - 1 = 0$. Et en effet, ce qu'on suppose à présent, revient au même que si l'on eût entendu d'abord par la lettre r une des racines imaginaires n.es de l'unité; et, de plus, par l'ordre même r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, &c. suivant lequel on a rangé ces racines, il est facile de voir que les développemens θ, θ', θ'', &c. en sont devenus des fonctions invariables, d'où la lettre r aura tout-à-fait disparu : ainsi la formule précédente coïncidera parfaitement avec celle des racines n.mes imaginaires de l'unité (*).

Mais il est évident que cette supposition de $r^n = 1$, au lieu de

$r^n = 1 + Mp$, et de $r + r^2 + r^3 + \&c. = -1$,

au lieu de $r + r^2 + r^3 + \&c. = -1 + Mp$,

revient à supprimer dans les expressions θ, θ', θ'', &c. qui sont sous les radicaux, certains multiples du nombre premier p que l'on considère. Donc, puisque par cette suppression de multiples p, on passe de l'expression du nombre entier r, à l'expression de la racine imaginaire n.me de l'unité, il s'ensuit que, par la restitution dans celle-ci de ces mêmes multiples de p, on reviendrait à l'expression exacte du nombre entier r. *Ce qu'il fallait démontrer.*

6. On peut remarquer que le premier radical $\sqrt[n-1]{\theta}$, qui est égal à t ou $r + r^a + r^{a^2} + \&c.$ se réduit tout de suite de lui-même à $-1 + Mp$, ou simplement à -1, et ne présente aucune ambi-

(*) Voyez l'ouvrage cité plus haut, et l'analyse que j'en ai donnée dans le *Magasin encyclopédique*, année 1808.

guité ; de sorte qu'il est inutile de faire cette puissance $n-1$ de t, qui est d'elle-même une fonction invariable des racines, et qu'ainsi l'équation peut se mettre sous la forme plus simple :

$$r = \frac{-1 + \sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \&c.}{n-1}.$$

De plus, parmi les racines α, β, γ, &c. de $x^{n-1} - 1 = 0$, il y en a toujours une α qui est égale à -1 ; de sorte que la fonction t' où cette racine α est employée, n'a besoin que d'être élevée au carré pour devenir une fonction invariable des racines r, r^2, r^3, &c. Ainsi, il y a encore un radical $\sqrt[n-1]{\theta'}$ qui peut se remplacer par un simple radical carré.

En général, parmi les racines de $x^{n-1} - 1 = 0$, quelques-unes appartiennent à des équations binomes inférieures $x^h - 1 = 0$, h étant un diviseur de $n-1$; et pour les fonctions t', t'', &c. où ces racines seraient employées, on en fera des fonctions invariables de r, r^2, r^3, &c., en les élevant simplement à la puissance h. Il ne sera donc nécessaire d'élever aux puissances $n-1$.^{mes} que les fonctions où l'on considère des racines uniquement propres à l'équation

$$x^{n-1} - 1 = 0;$$

c'est-à-dire, qui ne résolvent pas en même temps d'autres équations binomes $x^h - 1 = 0$ de degrés inférieurs. Ainsi, il n'y aura dans la formule d'autres radicaux $\sqrt[n-1]{\ }$, que ceux qui seront dus à ces racines propres à l'équation $x^{n-1} - 1 = 0$. Et d'ailleurs, le nombre $n-1$ étant un nombre composé, ces radicaux se réduisent, au fond, à des radicaux d'exposans marqués par les diviseurs simples de $n-1$.

7. Au reste, dans tous les cas particuliers, la formule la plus simple pourra toujours s'obtenir d'une manière directe, en suivant une méthode toute semblable à la précédente ; mais, au lieu de considérer à-la-fois toutes les racines r, r^2, r^3, r^4, r^5, &c. r^{n-1}, il faudra les

partager en plusieurs groupes de racines liées entre elles de la même manière. On formera immédiatement chacun de ces groupes au moyen de la suite ordonnée,

$$r,\ r^{a},\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ r^{a^4},\ \&c.\ r^{a^{n-2}},$$

en y prenant les racines de h en h, si h est un diviseur de $n-1$. On aura ainsi h groupes composés de $\frac{n-1}{h}$ racines ; et ces divers groupes seront aussi ordonnés entre eux, de manière que chacun d'eux produira le suivant, en y changeant la racine r en r^a.

On décomposera de même chaque groupe, en y prenant les racines de k en k, si k est un diviseur de leur nombre $\frac{n-1}{h}$, et ainsi de suite. Et si l'on applique enfin à la représentation des racines de ces groupes partiels, et des sommes de racines contenues dans ces groupes eux-mêmes, une analyse toute semblable à celle qu'on a suivie plus haut pour l'ensemble de toutes les racines, on parviendra facilement à une formule qui ne présentera point de radicaux d'exposans supérieurs aux facteurs 2, h, k, &c. du nombre composé $n-1$; et qui, par les mêmes hypothèses de

$$r^n = 1, \quad \text{et} \quad r + r^2 + r^3 + \&c. = -1,$$

se réduira de même à l'expression générale des racines n.es de l'unité. Et de plus, au lieu des racines 1, α, β, γ, &c., de l'équation $x^{n-1} - 1 = 0$, on n'aura eu besoin d'employer que les racines des équations inférieures

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^h - 1 = 0, \quad x^k - 1 = 0, \quad \&c.,$$

2, h, k, &c. étant les diviseurs simples de $n-1$.

Mais sous quelque forme algébrique qu'on veuille présenter la racine n.me de l'unité, elle exprimera toujours, comme valeurs résidues, les différens nombres entiers qui résolvent l'équation binome indéterminée

$x^n - 1 = Mp$, n étant un nombre *premier* quelconque diviseur de $p - 1$.

8. Si le nombre n, au lieu d'être premier, est un nombre composé, il est bien facile de voir que le même théorème a lieu encore, c'est-à-dire que les n racines de l'équation indéterminée

$$x^n - 1 = Mp$$

sont également représentées par les n racines de l'équation binome

$$x^n - 1 = 0.$$

Je ne m'arrête point à la démonstration de ce théorème, parce qu'on peut facilement le déduire de ce qu'on vient de démontrer dans le cas où n est un nombre premier, en observant que les racines d'un degré composé reviennent à une combinaison des racines simples marquées par les facteurs de ce degré, ou à des racines de ces racines.

Ainsi l'on a généralement, pour la représentation analytique des nombres entiers qui résolvent l'équation binome indéterminée

$$x^n - 1 = Mp,$$

la formule générale qui exprime les différentes racines n.mes de l'unité, l'exposant n étant un diviseur *quelconque* du nombre $p - 1$.

9. Lorsque n ne divise pas $p - 1$, l'équation indéterminée

$$x^n - 1 = Mp$$

n'a qu'une seule racine ou solution entière, qui est l'unité; et toutes les autres sont impossibles ou irrationnelles. Mais la formule des racines n.mes de l'unité n'en est pas moins encore l'expression analytique de ces racines même impossibles. Car, quelles que soient ces racines, leur nature serait de satisfaire à l'équation $x^n - 1 = Mp$: or, il résulte de cette hypothèse même qu'elles jouissent également de la propriété de pouvoir être représentées par les puissances successives d'une seule r, et de donner, aux multiples près du nombre p, leurs puissances

n.mes égales à l'unité, et leur somme totale égale à -1. Si donc vous imaginez qu'on les cherche comme dans le premier cas, en les représentant par les puissances successives d'une seule,

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ \&c.,$$

vous pourrez les mettre exactement sous la même forme, et, y supprimant par-tout les multiples de p, les réduire à l'expression des racines n.mes de l'unité. Ainsi la formule sera toujours l'expression analytique des racines entières ou irrationnelles de l'équation $x^n - 1 = Mp$, quel que soit le nombre premier p auquel on voudrait actuellement rapporter cette équation.

10. Et, par exemple, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ qui exprime une des racines cubiques imaginaires de l'unité, est toujours l'expression de l'un des deux nombres entiers ou irrationnels, autres que l'unité, qui peuvent résoudre l'équation $x^3 - 1 = Mp$, quel que soit le nombre premier p que l'on veuille considérer.

Si $p-1$ est divisible par 3, comme dans le cas de $p=43$, par exemple, alors les trois racines entières existent réellement, et sont ici les trois nombres 1, 7 et -6, comme il est facile de s'en assurer.

Dans ce cas, le nombre -3 qu'on voit sous le radical carré de la formule $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, est un résidu de carré exact relativement à 43; de sorte qu'en y ajoutant un multiple convenable de 43, l'irrationnalité disparaît, et la double formule $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ amène les deux nombres entiers 7 et -6, qui, avec l'unité, résolvent l'équation

$$x^3 - 1 = M43.$$

Mais si $p-1$ n'est pas divisible par 3, comme dans le cas de $p=29$, alors il n'y a que le seul nombre entier 1 à chercher, et les deux autres racines sont impossibles; mais on peut toujours supposer ces racines également représentées par la formule $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, que

l'on changera, si l'on veut, en $\frac{-1+ip\pm\sqrt{(-3+op)}}{2}$, en ajoutant aux nombres les multiples ip et op du module p. A la vérité, on ne pourra jamais, par cette addition, rendre le nombre -3 un carré parfait, et la quantité $\frac{-1+ip\pm\sqrt{(-3+op)}}{2}$ sera toujours une incommensurable, quel que soit le multiple de p que l'on y veuille introduire : mais cette expression irrationnelle, pouvant toujours satisfaire à l'équation $x^3-1=Mp$ (comme on le voit en supposant i et o tous deux nuls, ou même seulement, $3i^2p-6i+o=0$), sera l'expression analytique de ses racines même impossibles. Cette expression sera donc aussi parfaite que celle des imaginaires dans l'analyse; je veux dire qu'on pourra, sans crainte, l'employer dans le calcul, et que si, par une combinaison quelconque de semblables valeurs, les irrationnelles viennent à se détruire, le résultat final sera aussi exact, et la démonstration aussi bien établie, que si l'on n'eût point passé par ces valeurs irrationnelles.

11. On aura donc toujours les racines de l'équation binome indéterminée $x^n-1=Mp$, parfaitement bien représentées par celles de l'équation binome déterminée $x^n-1=0$, ou par les racines n.^mes^ de l'unité, *quel que soit l'exposant* n *et le nombre premier* p *que l'on voudra considérer.*

12. Mais il faut encore pénétrer plus avant dans la composition et les propriétés de la formule générale :

$$r=\frac{\sqrt[n-1]{\theta}+\sqrt[n-1]{\theta'}+\sqrt[n-1]{\theta''}+\sqrt[n-1]{\theta'''}+\&c.}{n-1}.$$

Les fonctions θ, θ', θ'', θ''', &c. sont, comme on l'a supposé, les puissances exactes $n-1$.^mes^ des fonctions linéaires t, t', t'', t''', &c.;

$$t = r + r^{a} + r^{a^2} + r^{a^3} + \&c.,$$

$$t' = r + \alpha r^{a} + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} + \&c.,$$

$$t'' = r + \beta r^{a} + \beta^2 r^{a^2} + \beta^3 r^{a^3} + \&c.,$$

$$t''' = r + \gamma r^{a} + \gamma^2 r^{a^2} + \gamma^3 r^{a^3} + \&c.,$$

&c.,

1, α, β, γ, &c. étant les diverses racines de l'équation binome

$$x^{n-1} - 1 = 0.$$

De plus, dans les fonctions θ, θ', θ'', θ''', &c., les puissances de r ont été rabaissées par-tout au-dessous de r^n, par la supposition de $r^n = 1$, ce qui, en supposant encore $r + r^a + r^{a^2} + \&c. = -1$, en a fait entièrement disparaître la lettre r, et réduit la formule

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \&c.}{n-1},$$

à l'expression exacte de la racine n.me de l'unité.

Mais les fonctions θ, θ', θ'', &c. contiennent encore les racines α, β, γ, &c. de l'équation binome $x^{n-1} - 1 = 0$; de sorte que la formule des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ peut être regardée comme une fonction des racines α, β, γ, &c. de l'équation inférieure

$$x^{n-1} - 1 = 0.$$

Or, dans le retour de cette formule aux nombres entiers, par la restitution convenable des multiples de p, nous avons toujours conservé ces imaginaires α, β, γ, &c. sans y rien changer, c'est-à-dire, sans avoir besoin de les ramener de même à des entiers relativement au nombre premier p que l'on considère. Ce changement ou cette réduction était

en

en effet inutile; car, dans l'addition des fonctions t, t', t'', t''', &c., qui sont les racines exactes $n-1$.[mes] des fonctions θ, θ', θ'', θ''', &c., il est évident que les imaginaires α, β, γ, &c. se détruisent d'elles-mêmes, et que le résultat $\frac{t+t'+t''+t'''+\&c.}{n-1}$ donne toujours le nombre entier r qu'on a dessein de découvrir. Cependant si $n-1$ était un diviseur exact de $p-1$, les racines $n-1$.[mes] de l'unité répondraient aussi à des entiers relativement à p, et l'on pourrait mettre dans la formule, à la place des imaginaires α, β, γ, &c. les entiers e, e', e'', &c., qui résolvent l'équation indéterminée

$$x^{n-1}-1=Mp.$$

Il est clair qu'aux multiples près du nombre p, on serait toujours conduit à la même valeur r, pour la racine cherchée de l'équation

$$x^n-1=Mp.$$

Et en effet, au lieu des imaginaires α, β, γ, &c., qui sont telles, qu'on a :

$$\alpha^{n-1}=1,\quad \beta^{n-1}=1,\quad \gamma^{n-1}=1,\quad \&c.$$

et
$$1+\alpha+\beta+\gamma+\&c.=0,$$

vous emploieriez les nombres e, e', e'', &c., qui seraient tels qu'on aurait

$$e^{n-1}=1+Mp,\quad e'^{n-1}=1+Mp,\quad e''^{n-1}=1+Mp,\quad \&c.,$$

et
$$1+e+e'+e''+\&c.=0+Mp;$$

et par conséquent, dans l'évaluation finale de la formule

$$r=\frac{\sqrt[n-1]{\theta}+\sqrt[n-1]{\theta'}+\sqrt[n-1]{\theta''}+\sqrt[n-1]{\theta'''}+\&c.}{n-1},$$

vous arriveriez toujours au même résultat qu'auparavant, en omettant les multiples de p.

13. De même, si dans l'expression des racines imaginaires α, β, γ, &c., il entrait aussi d'autres racines inférieures de l'unité dont le degré fût diviseur de $p-1$, on pourrait aussi mettre à leur place les entiers qui leur répondent relativement au même nombre premier p. On trouverait toujours les mêmes nombres e, e', e'', &c. qui répondent aux imaginaires α, β, γ, &c., et par conséquent on arriverait toujours à la même valeur pour la racine r; et ainsi de suite, s'il se trouvait encore dans la formule des radicaux inférieurs d'exposans diviseurs de $p-1$.

14. Et de là on peut conclure que, si la formule générale des racines n.^{mes} de l'unité, ou de l'équation binome $x^n - 1 = 0$, ne contient que des radicaux dont les exposans soient diviseurs de $p-1$, il n'y aura pas dans la formule un seul radical qui ne porte sur une puissance exacte de même degré, ou plutôt sur un résidu de cette puissance relativement au nombre premier p; de sorte que, par l'addition de certains multiples de p à ces résidus, l'expression deviendra, dans toutes ses parties, commensurable et entière, et n'offrira nulle part aucun signe d'opération inexécutable.

15. Mais s'il se trouve des radicaux de degrés non diviseurs de $p-1$, il y aura sous ces radicaux des nombres qui ne seront point résidus de puissances de même degré, et par conséquent, la formule contiendra des irrationnelles, qui ne pourront jamais être ramenées à des nombres entiers relativement à p. Cependant ces irrationnelles pourront être des puissances exactes d'incommensurables ou irrationnelles de même forme, de manière que l'opération radicale indiquée sur elles pourra s'exécuter; et alors, dans l'addition des radicaux semblables, ces incommensurables se détruiront d'elles-mêmes, et l'on parviendra toujours avec la même précision aux racines entières de la proposée $x^n - 1 = Mp$, lorsque cette équation admettra de telles racines.

III.

Application du Théorème à des Exemples.

16. Essayons d'approfondir encore cette théorie, et d'y répandre un plus grand jour par des exemples.

Considérons, entre autres, la formule générale des racines septièmes de l'unité, ou de l'équation binome $x^7 - 1 = 0$, afin de l'appliquer à la recherche des nombres qui peuvent résoudre l'équation indéterminée $x^7 - 1 = Mp$, dont le second membre désigne un multiple quelconque du nombre premier p.

Et d'abord, on peut résoudre sur-le-champ l'équation $x^7 - 1 = 0$ par la méthode ordinaire; car, en dégageant la racine réelle, ou le facteur $x - 1$, on a :

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

équation réciproque du sixième degré, qui se partage en trois du second; ou, si l'on veut, en ces deux du troisième degré,

$$x^3 - Xx^2 + X'x - 1 = 0,$$
$$x^3 - X'x^2 + Xx - 1 = 0,$$

dans lesquelles X et X' sont les racines de l'équation

$$X^2 + X + 2 = 0;$$

ce qui donne :

$$X = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2} \quad \text{et} \quad X' = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}.$$

Considérons la première,

$$x^3 - Xx^2 + X'x - 1 = 0;$$

et, pour la résoudre à la manière ordinaire, faisons $x = \frac{u + X}{3}$, et nous aurons la transformée :

$$u^3 - 3.\sqrt{-7}.u - 14 + \sqrt{-7} = 0,$$

qui donnera, toutes réductions faites,

$$u = \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)};$$

d'où l'on tire, pour la formule des racines 7.mes imaginaires de l'unité :

$$x = \frac{-1+\sqrt{-7}}{6} + \frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}\right\}.$$

Cette formule, en y combinant les radicaux cubes des trois manières convenables, donne trois racines de l'équation

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0;$$

et en y faisant ensuite le radical carré $\sqrt{-7}$ par-tout de signe contraire, elle donnera les trois autres; ce qui est évident par les valeurs précédentes de X et X', qui ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-7}$.

17. Actuellement, évaluons cette formule imaginaire relativement au nombre premier $p = 43 = 2.3.7 + 1$, afin d'obtenir les six nombres entiers, autres que l'unité, qui résolvent l'équation

$$x^7 - 1 = M.43.$$

Nous trouverons d'abord que, relativement à 43, le radical $\sqrt{-7}$ équivaut à ± 6, et le radical $\sqrt{21}$ à ± 8. Adoptons la première valeur de $\sqrt{-7}$, savoir, $+6$; l'une ou l'autre de $\sqrt{21}$, car cela est indifférent, puisque $\sqrt{21}$ entre en même temps avec des signes contraires, sous les deux radicaux cubes. La formule deviendra donc ainsi :

$$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(7 - 3 + 12)} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(7 - 3 - 12)},$$

ou $$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-8} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{16}.$$

Maintenant, on trouve que les trois valeurs de

$$\sqrt[3]{-8} \text{ sont } -2, \quad -12, \quad +14;$$

et que les trois valeurs de

$$\sqrt[3]{16} \text{ sont } -3, \quad +21, \quad -18:$$

de sorte que la formule ne présente plus que des quantités rationnelles, qu'on peut aussitôt réduire à des entiers par rapport à 43.

Mais il faut ici une attention particulière relativement aux valeurs numériques de ces deux radicaux : c'est de choisir avec soin celles qui doivent aller ensemble pour donner les véritables solutions de la proposée. Or, par la nature même de l'équation du troisième degré d'où l'on tire la formule proposée, il est clair qu'on doit combiner les valeurs de ces radicaux cubes, de manière que leur produit soit égal à $\sqrt{-7}$, qui est, en signe contraire, le tiers du coefficient du second terme dans la transformée

$$u^3 - 3 . \sqrt{-7} . u - 14 + \sqrt{-7} = 0;$$

d'où proviennent ces radicaux cubiques.

Il faut donc prendre deux à deux leurs valeurs, de telle sorte que leur produit fasse la même valeur que celle qu'on a prise pour $\sqrt{-7}$, c'est-à-dire, fasse $+6$. Ainsi, dans la formule, pour avoir les valeurs simultanées des radicanx cubes, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{16}$, il faudra prendre deux à deux ces valeurs, de la manière suivante, savoir :

-2 avec -3, dont le produit fait $+6$,

-12 avec $+21$, dont le produit fait $+6$,

$+14$ avec -18, dont le produit fait $+6$;

et l'on aura :

$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}(-2)+\frac{1}{3}(-3)$, d'ou

$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}(-12)+\frac{1}{3}(+21)$, d'où $x=+11$,

$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}(+14)+\frac{1}{3}(-18)$, d'où $x=+21$.

De cette manière on aura effectivement trois des racines 7.[mes] de l'unité, relativement au nombre premier 43; et toute autre combinaison nous donnerait de fausses valeurs pour ces racines.

Actuellement, employons dans la formule la seconde valeur du radical carré $\sqrt{-7}$, c'est-à-dire -6, et nous aurons :

$x=\frac{-7}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(7+3+12)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(7+3-12)}$, ou bien :

$x=\frac{-7}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{22}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{-2}$.

Or, on trouve pour les trois valeurs du premier radical cube, $\sqrt[3]{22}$, les nombres -4, -15, $+19$; et pour celles du second, $\sqrt[3]{-2}$, les nombres -20, $+9$, $+11$: mais ici l'on doit combiner deux à deux ces valeurs, de manière que leur produit soit égal à -6 ; ainsi il faudra prendre :

-4 avec -20, dont le produit fait -6,

-15 avec $+9$, dont le produit fait -6,

$+19$ avec $+11$, dont le produit fait -6;

et l'on aura :

$x=\frac{-7}{6}+\frac{1}{3}(-4)+\frac{1}{3}(-20)$, d'où $x=-2$,

$x=\frac{-7}{6}+\frac{1}{3}(-15)+\frac{1}{3}(+9)$, d'où $x=+4$,

$x=\frac{-7}{6}+\frac{1}{3}(+19)+\frac{1}{3}(-11)$, d'où $x=+16$.

Ce qui nous donne les trois autres racines de la proposée.

Ainsi -8, $+11$, $+21$, -2, $+4$, $+16$, sont, avec l'unité, les sept nombres entiers inférieurs à 43 qui résolvent l'équation indéterminée $x^7 - 1 = M.43$, ou, si l'on veut, les sept puissances 6.mes différentes des 42 résidus différens 1, 2, 3, 4, 5, &c., jusqu'à 42; c'est ce qu'on pourra vérifier *à posteriori*, en formant les 6.mes puissances de ces 42 résidus, ou en substituant dans l'équation même $x^7 - 1 = M.43$.

18. J'ai supposé plus haut qu'on avait obtenu tout d'un coup les trois valeurs de chaque radical cubique : mais il suffit d'avoir l'une quelconque d'entre elles pour obtenir les deux autres. Ainsi $\sqrt[3]{-8}$ nous donne immédiatement la valeur -2; les deux autres seront donc $-2.\alpha$, $-2.\beta$; α et β étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité : or, ces racines sont exprimées par $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; et cette formule ambiguë, évaluée en nombres relativement à 43, nous donne les deux racines 6 et -7. On aurait donc par cette voie :

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ ou } -2 \times 6, \text{ ou } -2 \times -7,$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ ou } -12, \text{ ou } +14,$$

comme ci-dessus.

De même, $\sqrt[3]{16}$ donne -3; car -3, élevé au cube, donne -27 qui revient à 16 : les deux autres racines seront donc -3α, -3β, ou -18, $+21$, comme on l'a trouvé plus haut.

19. La formule

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{6} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7 \mp \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}$$

que nous venons de considérer, et où l'on doit prendre en même temps les signes supérieurs ou les signes inférieurs de $\sqrt{-7}$, ne contient que des radicaux cubes et des radicaux carrés : or, le nombre premier

$p = 43$, auquel nous l'avons rapportée, étant tel, que $p - 1$ est divisible, non-seulement par 7, mais encore par 3, il s'ensuit qu'on n'a dû trouver nulle part aucun signe d'opération inexécutable, c'est-à-dire, aucun radical qui ne portât sur un résidu de puissance de même degré. Ainsi -7, qu'on voit, sous le premier radical carré, libre de tout autre signe, devait être un résidu de carré relativement à 43; et il le sera même dans tous les cas de $p - 1$ divisible par 7, parce que $p - 1$ est toujours divisible par 2. Ensuite, l'expression $7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$ qui est sous le radical cubique, devait revenir à un résidu de cube exact relativement à 43 : mais la partie $7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2}$ étant déjà rationnelle, il s'ensuit que l'autre partie $\frac{3}{2}\sqrt{21}$ devait l'être aussi. Et par conséquent, le nombre 21 qui est sous le second radical carré, devait être aussi un résidu de carré. C'est en effet ce qu'on vient de vérifier dans l'exemple dont il s'agit, et c'est ce qui aura lieu dans tous les cas de $p - 1$ divisible par 7 et par 3.

20. Si le nombre premier p est tel, que $p - 1$, toujours divisible par 7, ne le soit point par 3, le nombre -7 sera toujours un carré, à cause de $p - 1$ divisible par 2; mais $7 \pm \frac{\sqrt{-7}}{2} \mp \frac{3}{2}\sqrt{21}$ ne pourra être un cube, et par conséquent 21 ne pourra être un carré, relativement à p. Il y aura donc des irrationnelles dans la formule; et c'est ce qu'il faut actuellement développer.

21. Considérons, par exemple, le nombre premier $p = 29$, qui donne $p - 1 = 28$ divisible par 7, mais non par 3; et rapportons-y la formule précédente, afin d'obtenir les six nombres entiers, autres que l'unité, qui résolvent l'équation $x^7 - 1 = M.29$.

Nous trouvons d'abord $\sqrt{-7} = \pm 14$, et si nous employons la première valeur $+14$, la formule deviendra :

$$x = \frac{-1+14}{6} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-3}{2}\sqrt{21}\right)}.$$

Cette

Cette expression doit représenter actuellement une des valeurs de x; car les deux radicaux cubes sont tels, que leur produit fait $+14$, valeur adoptée pour $\sqrt{-7}$.

Or, 21 n'est point un carré par rapport à 29, et par conséquent les radicaux cubes affectent des irrationnelles relativement au même nombre. Mais ces irrationnelles sont égales et de signes contraires; elles se détruisent, et la formule se réduit simplement à $x = \frac{-1+14}{6}$, et nous donne $x=7$, qui est effectivement une des racines entières de la proposée.

Pour avoir les deux autres, il faut prendre les deux autres valeurs des radicaux cubes, et les combiner de manière que le produit fasse toujours $\sqrt{-7}=14$; les valeurs de x seront donc :

$$x = \frac{-1+14}{6} + \tfrac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \tfrac{1}{3}\beta\sqrt[3]{\left(\tfrac{-3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

$$x = \frac{-1+14}{6} + \tfrac{1}{3}\beta\sqrt[3]{\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \tfrac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{\left(\tfrac{-3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

α et β étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité; c'est-à-dire,

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Les deux valeurs de x se réduisent donc à

$$x = 7 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{-3}\cdot\sqrt[3]{(\tfrac{3}{2}\sqrt{21})}.$$

A la vérité, les radicaux $\sqrt{-3}$ et $\sqrt[3]{(\frac{3}{2}\sqrt{21})}$ sont encore irrationnels par rapport à 29; mais leur produit est rationnel, car il est aisé de voir qu'on a (en remplaçant $\frac{3}{2}$ par 16, et 21 par -8):

$$\sqrt{-3}\cdot\sqrt[3]{(\tfrac{3}{2}\sqrt{21})} = \sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2}\cdot\sqrt[3]{16},$$

ou $$-\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{16} = \mp 8 \times -6 = \pm 48;$$

ainsi l'on aura :

$$x = 7 \pm \tfrac{1}{3} 48 = 7 \pm 16 = -6, \quad \text{ou} \quad -9 ;$$

d'où l'on voit que les incommensurables ont disparu de la formule, et qu'on a trouvé les deux nombres -6, -9, qui, avec le nombre 7 déjà trouvé, sont effectivement trois des racines 7.mes de l'unité relativement à 29.

Pour avoir les trois dernières racines, il faut prendre actuellement la seconde valeur de $\sqrt{-7}$, qui est -14, et la formule deviendra, en réduisant :

$$x = 12 + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(14 + \tfrac{3}{2}\sqrt{21})} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(14 - \tfrac{3}{2}\sqrt{21})} ;$$

ou si l'on veut remplacer $\frac{3}{2}\sqrt{21}$ par $7\sqrt{2}$, ce qui est la même chose par rapport à 29, on aura plus simplement :

$$x = 12 + \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{(14 + 7\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(14 - 7\sqrt{2})}\right\}.$$

Mais cette formule ne se délivre pas des irrationnelles aussi facilement que la première. Cependant, comme elle doit répondre exactement à des entiers x, nous sommes sûrs que les irrationnelles $14 \pm 7\sqrt{2}$, qui sont sous les radicaux cubiques, doivent être des cubes exacts d'irrationnelles de même forme, afin que, dans l'addition des radicaux, les incommensurables puissent se détruire. Et en effet, avec un peu d'attention, il est facile de reconnaître que $14 + 7\sqrt{2}$ est, aux multiples près de 29 (ce qui est toujours sous-entendu), le cube exact de l'irrationnelle de même forme, $5 + 11\sqrt{2}$; et que $14 - 7\sqrt{2}$ est le cube exact de l'irrationnelle conjuguée $5 - 11\sqrt{2}$: de sorte qu'on aura, pour racines cubiques, les deux valeurs, $5 + 11\sqrt{2}$ et $5 - 11\sqrt{2}$; valeurs qui doivent d'ailleurs aller ensemble dans la formule, puisqu'elles donnent leur produit égal à $5^2 - 2 . 11^2 = -14 = \sqrt{-7}$, comme cela doit être par l'hypothèse.

On aura donc d'abord :

$$x = 12 + \tfrac{1}{3}(5 + 11\sqrt{2}) + \tfrac{1}{3}(5 - 11\sqrt{2}) = 12 + \tfrac{10}{3} = -4.$$

Ensuite, prenant les deux autres signes des radicaux cubes, on aura :

$$x = 12 + \tfrac{1}{3}\alpha(5 + 11\sqrt{2}) + \tfrac{1}{3}\beta(5 - 11\sqrt{2}),$$
$$x = 12 + \tfrac{1}{3}\beta(5 + 11\sqrt{2}) + \tfrac{1}{3}\alpha(5 - 11\sqrt{2});$$

et si l'on met à la place de α et β, leurs valeurs $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, il viendra, en effaçant les irrationnelles qui se détruisent,

$$x = 12 + \tfrac{1}{3}(-5 + 11.\sqrt{2}\sqrt{-3}),$$
$$x = 12 + \tfrac{1}{3}(-5 - 11.\sqrt{2}\sqrt{-3});$$

formules qui ne contiennent plus d'incommensurables, car le produit des radicaux carrés $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-3}$, revient à $\sqrt{-6}$, qui répond à 9. Ainsi l'on aura :

$$x = 12 + \tfrac{1}{3}(-5 + 11.9) = -5,$$
$$x = 12 + \tfrac{1}{3}(-5 - 11.9) = -13;$$

d'où il résulte enfin qu'on aura les six nombres 7, -6, -9, -4, -5, -13, qui seront, avec l'unité, les sept racines de l'équation indéterminée $x^7 - 1 = M.29$; et c'est ce qu'on peut vérifier *à posteriori*, en les substituant dans cette équation même.

22. Nous avons dit plus haut que la racine cube de $14 \pm 7\sqrt{2}$, relativement à 29, était $5 \pm 11\sqrt{2}$, c'est-à-dire, qu'on a

$$\sqrt[3]{(14 \pm 7\sqrt{2})} = 5 \pm 11\sqrt{2};$$

on trouverait également :

$$\sqrt[3]{(14 \pm 7\sqrt{2})} = +6 \pm 5\sqrt{2},$$

ou bien encore :

$$\sqrt[3]{(14 \pm 7\sqrt{2})} = -11 \pm 13\sqrt{2};$$

de sorte qu'on peut indifféremment employer ces trois valeurs dans la recherche des racines de la proposée. On peut même dire qu'elles sont toujours effectivement employées toutes les trois ; car elles reviennent à l'une quelconque d'entre elles multipliée par les trois racines cubiques de l'unité. Ainsi l'on trouvera que $6 \pm 5\sqrt{2}$ n'est autre chose que la première, $5 \pm 11\sqrt{2}$ multipliée par $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; et la troisième, $-11 \pm 13\sqrt{2}$, est encore la première multipliée par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Nous avons aussi remplacé l'irrationnelle

$$14 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21} \quad \text{ou} \quad 14 \pm 16\sqrt{21}, \quad \text{par} \quad 14 \pm 7\sqrt{2}:$$

nous aurions pu de même la remplacer par toute autre équivalente de la forme $a \pm b\sqrt{k}$, k étant un non-résidu de carré relativement à 29; car il est assez facile de voir que toutes ces expressions peuvent se changer les unes dans les autres. Si l'on conservait la première $14 \pm 16\sqrt{21}$, on trouverait

$$\sqrt[3]{(14 \pm 16\sqrt{21})} = 5 \mp 8\sqrt{21}, \text{ ou } -11 \pm 9\sqrt{21}, \text{ ou } 6 \mp \sqrt{21}$$

et en employant ces valeurs, on parviendrait de même aux racines de l'équation proposée.

23. J'ai développé ces exemples avec quelque détail, non-seulement pour éclaircir et confirmer la théorie par le calcul, mais encore pour faire quelques remarques importantes dans l'application de la formule radicale à la recherche des nombres entiers qu'elle représente. Ainsi, l'on a vu qu'il ne suffit pas de donner aux radicaux de cette formule les signes convenables qui doivent aller ensemble pour qu'elle

exprime les diverses racines de l'unité; mais qu'il faut encore, lorsqu'on passe à l'évaluation en nombres, conjuguer aussi les valeurs qu'on adopte pour les radicaux, de manière à ne pas se contredire : comme si, par exemple, dans le premier cas de $p = 43$, après avoir pris pour $\sqrt{-7}$ la valeur $+6$, on allait mettre ensemble les valeurs -2 et 21 des deux radicaux cubes $\sqrt[3]{-8}$ et $\sqrt[3]{16}$, dont le produit -42 revient à 1, tandis qu'il doit revenir à $+6$, valeur adoptée pour $\sqrt{-7}$ dans la formule proposée.

On a vu aussi dans le second exemple, comment les racines, étant réelles et entières, se présentent néanmoins sous la forme d'irrationnelles; de sorte qu'il y a ici une espèce de cas irréductible tout-à-fait analogue à celui qu'on rencontre dans la résolution des équations algébriques. Ce cas irréductible est inévitable par la nature des choses; car si, par exemple, dans le cas de $p = 29$ (ou de p égal à tout autre nombre premier, tel que $p - 1$ ne soit point divisible par 3), il était possible que la double expression $7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$, qui est sous le radical cube, fût réellement réductible à deux cubes entiers e^3 et e'^3; alors on aurait pour une des racines de $x^7 - 1 = Mp$, une expression de la forme :

$$x = A + \tfrac{1}{3} e + \tfrac{1}{3} e';$$

A désignant un certain nombre entier : on aurait aussi, pour une autre racine,

$$x' = A + \tfrac{1}{3}\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) e + \tfrac{1}{3}\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) e';$$

d'où il faudrait conclure que $(e - e')\sqrt{-3}$ serait rationnelle, et qu'ainsi le radical $\sqrt{-3}$, et partant la formule $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, qui marque une des racines cubiques imaginaires de l'unité, serait aussi rationnelle relativement à p. Mais cette racine ne peut répondre à un entier; car il est aisé de voir que $p - 1$ serait alors divisible par 3, ce qui est contre l'hypothèse.

Et réciproquement, on voit que si p est tel, que $p-1$ soit divisible par 3, alors la quantité $7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$ sera exactement réductible à un cube.

Car si la racine cube de cette expression ne pouvait revenir qu'à l'irrationnelle $a \pm b\sqrt{k}$, k étant un non-résidu de carré, alors la formule

$$x = A + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(a + b\sqrt{k})^3} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(a - b\sqrt{k})^3}$$

ne pourrait donner qu'une seule racine entière pour l'équation

$$x^n - 1 = Mp,$$

tandis qu'elle doit en donner trois par l'hypothèse de $p-1$ divisible par 7. En effet, les deux autres racines seraient :

$$x' = A + \tfrac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{(a + b\sqrt{k})^3} + \tfrac{1}{3}\beta\sqrt[3]{(a - b\sqrt{k})^3},$$

$$x'' = A + \tfrac{1}{3}\beta\sqrt[3]{(a + b\sqrt{k})^3} + \tfrac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{(a - b\sqrt{k})^3},$$

α et β étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité ; et ces deux racines α et β répondraient nécessairement à des entiers, puisqu'on suppose $p-1$ divisible par 3. Mais ces entiers étant différens, les irrationnelles $b\sqrt{k}$ ne se détruiraient point dans ces formules ; de sorte que x' et x'' seraient nécessairement irrationnelles, ce qui est contre l'hypothèse.

24. Au reste, tout ce que je viens de dire dans les deux exemples précédens, est une suite naturelle de la démonstration générale par laquelle j'ai fait voir la composition semblable de la formule qui exprime les racines de l'équation binome $x^n - 1 = 0$, et de celle qui représenterait actuellement les solutions entières de l'équation indéterminée $x^n - 1 = Mp$. J'ai voulu suivre et vérifier tous ces détails sur la formule des racines septièmes de l'unité ; mais si l'on voulait s'en rendre compte *à priori*, et de la manière la plus lumineuse, il n'y aurait rien

de mieux à faire que d'appliquer à cet exemple même de

$$x^7 - 1 = Mp,$$

la méthode générale que nous avons exposée au commencement, et où l'on voit la formule composée avec les racines mêmes qu'elle doit identiquement représenter l'une après l'autre.

25. Ainsi, r étant une quelconque des racines, autres que l'unité, qui résolvent l'équation $x^7 - 1 = Mp$, toutes les autres seront marquées par r^2, r^3, r^4, r^5, r^6 : ou bien, si on les range dans l'ordre où chacune d'elles est le *cube* de celle qui la précède, elles seront représentées par r, r^3, r^2, r^6, r^4, r^5.

Considérez les trois racines prises dans cette suite en allant de deux en deux, savoir, r, r^2, r^4, et les trois autres racines assemblées de même, r^3, r^6, r^5; et soient

$$r + r^2 + r^4 = X \quad \text{et} \quad r^3 + r^6 + r^5 = X';$$

en prenant les deux fonctions linéaires,

$$X + X' \quad \text{et} \quad X - X',$$

vous pourrez mettre les deux nombres X et X' sous la forme :

$$X = \frac{X + X' + \sqrt{(X - X')^2}}{2},$$

$$X' = \frac{X + X' - \sqrt{(X - X')^2}}{2}.$$

Actuellement, considérez les trois fonctions linéaires :

$$r + r^2 + r^4 = X,$$

$$r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 = t,$$

$$r + \beta r^2 + \beta^2 r^4 = t';$$

et vous aurez identiquement :

$$r = \frac{X + t + t'}{3} = \frac{X + \sqrt[3]{t^3} + \sqrt[3]{t'^3}}{3};$$

c'est-à-dire, que le nombre r sera mis sous la forme identique :

$$r = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3}.$$

Cette formule, en donnant aux radicaux cubiques les signes convenables, présentera indifféremment les trois racines r, r^2, r^4; car il est évident qu'on aura :

$$r^2 = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\beta^2 \sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3},$$

$$r^4 = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\alpha \sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha r^4)^3}}{3} + \frac{\beta \sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3}.$$

On trouverait de même pour les trois autres racines r^3, r^6, r^5 :

$$r^3 = \frac{r^3 + r^6 + r^5}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r^3 + \alpha r^6 + \alpha^6 r^5)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r^3 + \beta r^6 + \beta^2 r^5)^5}}{3},$$

$$r^6 = \frac{r^3 + r^6 + r^5}{3} + \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{(r^3 + \alpha r^6 + \alpha^2 r^5)^3}}{3} + \frac{\beta^2 \sqrt[3]{(r^3 + \beta r^6 + \beta^2 r^5)^3}}{3}$$

$$r^5 = \frac{r^3 + r^6 + r^5}{3} + \frac{\alpha \sqrt[3]{(r^3 + \alpha r^6 + \alpha^2 r^5)^3}}{3} + \frac{\beta \sqrt[3]{(r^3 + \beta r^6 + \beta^2 r^5)^3}}{3}$$

Et ces six équations ne sont autre chose que des identités.

Imaginez maintenant qu'on développe les cubes

$$(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3, \text{ \&c.};$$

et, que dans les développemens, on fasse par-tout $r^7 = 1$ au lieu de $1 + Mp$; et

r

$$r + r^2 + r^4 = X \quad \text{et} \quad r^3 + r^6 + r^5 = X';$$

et puis, qu'on fasse $X + X' = -1$ au lieu de $-1 + Mp$, et par conséquent $(X - X')^2 = -7$ au lieu de $-1 + Mp$; et la formule générale qui exprimait un quelconque des nombres r, deviendra :

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{6} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)};$$

c'est-à-dire, l'expression exacte de l'une quelconque des racines septièmes imaginaires de l'unité. Ainsi cette formule, en y rétablissant sous les divers radicaux les multiples de p qu'on y a supprimés, doit revenir à l'expression des nombres entiers r qui résolvent l'équation indéterminée $x^7 - 1 = Mp$, comme nous l'avons démontré d'une manière générale au commencement de ce Mémoire.

26. Si donc l'équation a toutes ses racines entières, ce qui a lieu lorsque $p - 1$ est divisible par 7, la première partie $\frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{6}$ doit revenir à la somme des trois nombres entiers

$$r + r^2 + r^4, \quad \text{ou} \quad r^3 + r^6 + r^5;$$

et par conséquent le nombre -7 qui est sous le radical carré, doit toujours être un *résidu de carré* relativement à p.

Ensuite, la partie $7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$ doit revenir au cube de l'expression

$$r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4, \quad \text{ou} \quad r + \alpha^2 r^2 + \alpha r^4,$$

c'est-à-dire, au cube de

$$r - \frac{r^2 + r^4}{2} \pm \frac{r^2 - r^4}{2} \cdot \sqrt{-3};$$

expression rationnelle et réductible à un entier, si $p - 1$ est divisible

par 3 ; car le radical $\sqrt{-3}$ pourra se réduire alors à un entier relativement à p.

Dans le cas contraire, elle sera irrationnelle; car -3 ne sera point un résidu de carré exact par rapport au nombre p.

La racine cube de $7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$ pourra donc toujours être ramenée à la forme $a \pm b\sqrt{-3}$, en faisant :

$$a = \frac{2r - r^2 - r^4}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{r^2 - r^4}{2}.$$

Le nombre a aura toujours trois valeurs différentes, qu'on trouvera en changeant les racines r, r^2, r^4, les unes dans les autres; de sorte qu'on aura :

$$a = \frac{2r - r^2 - r^4}{2}, \text{ ou } \frac{2r^2 - r^4 - r}{2}, \text{ ou } \frac{2r^4 - r - r^2}{2};$$

et le nombre b aura les trois valeurs correspondantes :

$$b = \frac{r^2 - r^4}{2}, \text{ ou } \frac{r^4 - r}{2}, \text{ ou } \frac{r - r^2}{2},$$

Pareillement, la racine cube de $7 + \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$ aura trois valeurs différentes de la forme $a' \pm b'\sqrt{-3}$, en faisant :

$$a' = \frac{2r^3 - r^6 - r^5}{2}, \text{ ou } \frac{2r^6 - r^5 - r^3}{2}, \text{ ou } \frac{2r^5 - r^3 - r^6}{2},$$

$$b' = \frac{r^6 - r^5}{2}, \text{ ou } \frac{r^5 - r^3}{2}, \text{ ou } \frac{r^3 - r^6}{2};$$

ce qui revient, comme on voit, à changer, dans les expressions précédentes, les trois racines r, r^2, r^4 dans les trois autres racines conjuguées r^3, r^6, r^5.

27. Ainsi, nous avons trouvé que, relativement à $p = 43$, les six racines de $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = M.43$, sont :

$r, \quad r^2, \quad r^4; \quad r^3, \quad r^6, \quad r^5,$

$-2, \quad 4, \quad 16; \quad -8, \quad 21, \quad 11,$

on aurait donc dans ce cas, pour le premier radical cube, la valeur

$$a \pm b\sqrt{-3} = \frac{2r - r^2 - r^4}{2} \pm \frac{r^2 - r^4}{2} . \sqrt{-3};$$

ce qui donnerait :

$$\sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = -21 \pm 6\sqrt{-3},$$

$$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = -6 \pm 9\sqrt{-3},$$

$$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = 15 \pm 3\sqrt{-3}.$$

On trouverait de même les trois valeurs du radical cube

$$\sqrt[3]{\left(7 + \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

en employant de la même manière les trois nombres r^3, r^6, r^7.

Ici le nombre -3 est un carré dont la racine est ± 13; les valeurs des radicaux cubes précédens sont donc : -4 et -20, -5 et 9, 19 et 11, comme nous l'avons trouvé précédemment ; et les valeurs qui doivent aller ensemble dans la formule se trouvent ici toutes accouplées, comme cela résulte nécessairement de notre analyse.

28. Pour le nombre premier $p = 29$, on a les racines

$r, \quad r^2, \quad r^4; \quad r^3, \quad r^6, \quad r^5,$ respectivement égales à

$-4, -13, -5; -6, 7, -9;$ on aura donc :

$$\sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = 5 \pm 4\sqrt{-3},$$

$$\alpha \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = 6 \pm 14\sqrt{-3},$$

$$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = -11 \pm 10\sqrt{-3}.$$

On trouverait de même les trois valeurs de

$$\sqrt[3]{\left(7+\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

en employant les racines r^3, r^6, r^5, au lieu des racines r, r^2, r^4. Mais ici -3 n'est point un carré relativement à $p=29$, et ces radicaux cubes demeurent irrationnels : ce qui s'accorde entièrement avec ce que nous avons trouvé d'une autre manière, et nous ramène exactement aux mêmes valeurs déjà obtenues pour ces radicaux. Et en effet, $5\pm4\sqrt{-3}$ équivaut à $5\mp11\sqrt{2}$; de même, $6\pm14\sqrt{-3}$ équivaut à $6\pm5\sqrt{2}$, &c. &c., et ainsi des autres.

29. Ainsi l'on revoit par l'analyse la plus claire, les différens théorèmes que nous avions déjà reconnus sur cet exemple des racines septièmes de l'unité. Les irrationnelles ne viennent dans la formule que par les racines cubiques $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; de sorte que, si ces racines répondent à des entiers relativement à p, la formule n'offre par-tout que des puissances exactes sous les radicaux qu'elle renferme. On peut donc dire que la quadruple expression $7\pm\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$ répond toujours à un résidu cubique entier relativement à tout nombre premier p de la forme $7m+1$, lorsque m est divisible par 3 ; et que, si m n'est pas divisible par 3, cette expression ne peut jamais être un résidu cubique. Et l'on peut trouver une foule de théorèmes semblables sur les résidus de degrés supérieurs, par la considération des racines supérieures de l'unité. Les résidus carrés sont les seuls dont la théorie soit connue des géomètres, et l'on n'a encore aucun théorème sur les résidus d'un ordre plus élevé. Il me semble que notre analyse ouvre un nouveau champ à ces découvertes.

30. Mais il n'est pas inutile de faire encore quelques remarques sur la formule identique

$$r = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3}$$

que je représenterai, pour abréger, par

$$r = \frac{L}{3} + \frac{\sqrt[3]{A}}{3} + \frac{\sqrt[3]{A'}}{3}.$$

Vous voyez que les trois nombres r, r^2, r^4 sont donnés l'un après l'autre, par l'emploi des trois signes des radicaux cubiques, en les combinant de cette manière :

$$\sqrt[3]{A} \text{ avec } \sqrt[3]{A'},$$
$$\alpha\sqrt[3]{A} \text{ avec } \beta\sqrt[3]{A'},$$
$$\beta\sqrt[3]{A} \text{ avec } \alpha\sqrt[3]{A'}.$$

Or, il est clair que ces trois racines r, r^2, r^4, seraient également données en ne faisant usage que d'un seul signe pour chaque radical, mais en changeant sous ces radicaux la place des racines, sans troubler l'ordre qui règne entre elles. La somme L ne varie point par ces changemens : les cubes A et A' ne varient pas non plus ; mais leurs racines cubiques prennent leurs trois valeurs différentes. Ainsi la permutation des racines sous le radical équivaut au changement du signe de ce radical.

Si, au lieu de faire entre les racines ces permutations simultanées, on changeait la racine r qu'on emploie, en une autre, comme r^2 par exemple, alors la somme L deviendrait $L_1 = r^2 + r^4 + r^8$; A et A' deviendraient

$$A_1 = (r^2 + \alpha r^4 + \beta r^8)^3, \quad A'_1 = (r^2 + \beta r^4 + \alpha r^8)^3 ;$$

et la formule $\frac{L_1 + \sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A'_1}}{3}$, au lieu de donner identique-

ment la racine r, nous donnerait identiquement la racine r^2, en conservant les mêmes signes radicaux qu'auparavant.

Et de même si, au lieu de r, vous employiez r^4, vous auriez de nouvelles expressions L_2, A_2, A'_2; et la formule

$$\frac{L_2 + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A'_2}}{3},$$

vous donnerait identiquement la racine r^4, en conservant toujours les mêmes signes aux radicaux.

Mais il est clair que les fonctions L_1, A_1, A'_1 et les fonctions L_2, A_2, A'_2, reviendraient respectivement aux premières L, A, A', en y rabaissant les puissances de r au-dessous de r^7, par la supposition $r^7 = 1$, c'est-à-dire, par la suppression de certains multiples de p. Donc, par l'addition de certains multiples de p aux quantités L, A et A', vous les ferez devenir respectivement L_1, A_1 et A'_1 ou L_2, A_2, A'_2. Donc, si vous voulez toujours employer dans la formule des racines de l'unité, un même signe unique pour chaque radical, et parvenir pourtant aux différens nombres que cette formule peut également représenter, il suffira d'ajouter à la quantité qui est sous ce radical les différens multiples de p qui sont également propres à la rendre une puissance exacte. Pour les nombres affectés du radical *carré*, il y aura deux différens multiples de p qui les rendront des carrés exacts; et il n'y en aura que deux qui puissent donner des carrés différens relativement à p. Pour les quantités soumises au radical *cubique*, il y aura trois différens multiples; et il n'y en aura que trois qui répondent à des cubes différens. Et ce qu'on vient de dire doit s'étendre à toutes les expressions radicales que l'on pourrait considérer.

31. La formule algébrique des racines d'une équation, nous est donnée d'une manière tout-à-fait déterminée, et non pas comme une expression identique composée des différentes racines x, x', x'', &c. lesquelles sont supposées inconnues. Ainsi nous ne pouvons point y

permuter actuellement les racines, afin d'amener cette formule à donner successivement chaque racine par les mêmes signes d'opération. Donc, pour que la formule représente actuellement telle racine qu'on voudra, il est nécessaire que les signes radicaux y aient un sens équivoque; c'est-à-dire, qu'ils répondent indifféremment à plusieurs résultats qu'on puisse adopter à volonté. D'où l'on voit que la théorie des signes, en algèbre, a ses principes fondamentaux dans la théorie de l'ordre et des permutations ; et c'est ce que nous développerons ailleurs avec plus d'étendue.

32. J'ajouterai encore, pour ne rien laisser à desirer sur la théorie précédente, qu'au lieu de l'expression identique

$$r = \frac{r+r^2+r^4}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r+\alpha r^2+\alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r+\beta r^2+\beta^2 r^4)^3}}{3},$$

qui répond à la racine de $x^7-1 : x-1 = 0$, et qui conduit à la formule la plus simple qu'on puisse obtenir, on pourrait en considérer une autre qui répond encore aux mêmes racines, mais qui contient des radicaux sixièmes. On trouverait également, mais par des opérations plus longues, les mêmes résultats que nous avons obtenus. Et en effet, je trouve que cette autre expression générale de la racine r, étant ramenée à une identité entre toutes les racines r, r^2, r^3, r^4, &c., reviendrait à celle-ci :

$$r = \frac{r+r^3+r^2+r^6+r^4+r^5}{6} + \frac{\sqrt{(r-r^3+r^2-r^6+r^4-r^5)^2}}{6}$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{(r+\alpha r^3+\alpha^2 r^2+r^6+\alpha r^4+\alpha^2 r^5)^3}}{6} + \frac{\sqrt[3]{(r+\beta r^3+\beta^2 r^2+r^6+\beta r^4+\beta^2 r^5)^3}}{6}$$

$$+ \frac{\sqrt[6]{(r-\alpha r^3+\alpha^2 r^2-r^3+\alpha r^4-\alpha r^5)^4}}{6} + \frac{\sqrt[6]{(r-\beta r^3+\gamma^2 r^2-r^6+\beta r^4-\beta^2 r^5)^6}}{6}.$$

Or, il est facile de voir qu'elle coïncide entièrement avec la première.

Car, si l'on désigne, pour abréger, les trois termes de la première par

$$\frac{L}{3} + \frac{\sqrt[3]{A}}{3} + \frac{\sqrt[3]{A'}}{3},$$

et les six termes de la seconde, par

$$\frac{M}{6} + \frac{\sqrt{N}}{6} + \frac{\sqrt[3]{P}}{6} + \frac{\sqrt[3]{P'}}{6} + \frac{\sqrt[6]{Q}}{6} + \frac{\sqrt[6]{Q'}}{6},$$

il est clair que $\frac{L}{3}$ coïncide avec $\frac{M + \sqrt{N}}{6}$;

le radical cube $\frac{\sqrt[3]{A}}{3}$, avec $\frac{\sqrt[3]{P} + \sqrt[6]{Q}}{6}$; et enfin

le radical cube $\frac{\sqrt[3]{A'}}{3}$, avec $\frac{\sqrt[3]{P'} + \sqrt[6]{Q'}}{6}$:

Ainsi ces formules différentes de la racine 7.me de l'unité, reviennent dans le fond à la même formule, comme cela doit être, et dans ce cas, et en général, pour les équations de tous les degrés.

IV.

Application à la Recherche des Racines primitives.

33. Reprenons maintenant l'équation générale $x^n - 1 = Mp$, et considérons le cas où l'exposant n, diviseur de $p-1$, est le nombre $p-1$ lui-même. Nous aurons donc l'équation $x^{p-1} - 1 = Mp$, qui est celle du fameux théorème de *Fermat*, et qui a pour racines les $p-1$ nombres différens inférieurs à p,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \&c.,\ p-1.$$

On a vu que tous ces nombres sont analytiquement représentés par les

$p-1$

$p-1$ racines de l'équation binome $x^{p-1}-1=0$; c'est-à-dire, par les racines $p-1$.^{mes} de l'unité. Or, parmi ces racines, il y en a quelques-unes α qui appartiennent uniquement à la proposée $x^{p-1}-1=0$, c'est-à-dire, qui ne résolvent pas en même temps d'autres équations binomes de degrés inférieurs, ou, si l'on veut, dont aucune puissance ne peut donner l'unité avant la puissance $p-1$.^{me} Chacune de ces racines imaginaires est donc propre à fournir, par ses puissances successives, la suite complète de toutes les racines ; et il est clair qu'il y a autant de ces racines α, qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à $p-1$. Ainsi, cette imaginaire α doit répondre à un nombre entier e dont aucune puissance, divisée par p, ne puisse ramener l'unité pour reste, avant la puissance $p-1$.^{me}; et qui, par conséquent, fournisse, par ses puissances successives, e, e^2, e^3, e^4, &c., e^{p-1}, la suite complète des $p-1$ résidus différens 1, 2, 3, 4, 5, &c., $p-1$. C'est ce nombre e qu'on appelle une *racine primitive du nombre premier* p : il conviendrait mieux de l'appeler *racine primitive de l'équation binome* $x^{p-1}-1=Mp$; car toute équation $x^n-1=Mp$, où n est un diviseur de $p-1$, a aussi ses *racines primitives*, qui jouissent de propriétés semblables, et qui sont de même représentées, suivant notre théorie, par les racines primitives imaginaires de l'équation $x^n-1=0$. Ainsi la dénomination ordinaire n'est relative qu'au cas particulier de $n=p-1$, tandis qu'elle devrait s'étendre à tous les cas de n diviseur de $p-1$. Au reste, comme l'équation $x^{p-1}-1=Mp$ renferme toutes les équations semblables, $x^n-1=Mp$, où n est une aliquote de $p-1$, l'expression des racines primitives de cette équation conduit naturellement à celle de toutes les autres qui se rapporteraient aux diviseurs binomes de la première. Car, soit e la racine primitive d'un nombre premier p, ou, pour mieux dire, la racine primitive de l'équation $x^{p-1}-1=Mp$; il est facile de voir que toutes les puissances e^k d'exposans k inférieurs et premiers à $p-1$, seront aussi des racines primitives.

Ensuite, toutes les puissances e^n d'exposans n diviseurs de $p-1$,

seront les racines primitives de l'équation $x^{\frac{p-1}{n}}-1=Mp$, ou, si l'on veut, elles seront des *puissances* n.^{mes} *primitives* entre toutes les puissances de même degré, lesquelles sont au nombre de $\frac{p-1}{n}$, comme cela est évident par la proposée $(x^n)^{\frac{p-1}{n}}-1=Mp$, qui, par rapport à x^n, est du degré $\frac{p-1}{n}$.

Ainsi 2 est une racine primitive du nombre 13; et par conséquent, 2^5, 2^7, 2^{11} sont les trois autres, parce que 5, 7 et 11 sont, après l'unité, les trois nombres inférieurs et premiers à 12. Mais 2^3 est racine primitive de $x^{\frac{12}{3}}-1$ ou $x^4-1=M.13$; ou, si l'on veut, 2^3 est un *cube primitif* entre les quatre cubes différens des douze nombres 1, 2, 3, 4, &c., 12. De même, 2^2 serait un carré *primitif* entre les six carrés différens de ces nombres; et 2^4, une quatrième puissance *primitive* entre les trois puissances 4.mes de ces mêmes nombres.

34. Mais venons à la recherche des racines primitives par le moyen de nos formules générales, et donnons des exemples.

Soit d'abord le nombre premier $p=3$. La racine primitive de 3 ou de $x^2-1=M.3$, est exprimée par la racine primitive de l'équation binome

$$x^2-1=0,$$

laquelle est $x=-1$. Or -1, relativement à 3, équivaut à $-1+3$, ou à 2, qui est effectivement la racine primitive de 3.

Soit $p=5$. La racine primitive de 5 est exprimée par la racine primitive de $x^4-1=0$: ainsi, en rejetant le facteur x^2-1, il vient $x^2+1=0$, qui donne $x=\pm\sqrt{-1}$ pour l'expression ambiguë de la racine primitive de $x^4-1=0$. Or, $\sqrt{-1}$ équivaut, comme résidu, à $\sqrt{(-1+5)}$, à $\sqrt{4}$, à ± 2, ou, si l'on veut, en changeant

-2 en $-2+5=3$; $\sqrt{-1}$ équivaut à 2 et à 3, qui sont effectivement les deux racines primitives de 5.

Soit $p=7$. Les racines primitives seront exprimées par les racines imaginaires primitives de $x^6-1=0$. Rejetant donc le facteur binome x^3-1, il vient $x^3+1=0$, d'où, en écartant le facteur $x+1$, on tire $x^2-x+1=0$, qui renferme les deux racines cherchées. Cette équation résolue, donne $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$: or -3 équivaut à $+7-3$, à 4, et $\pm\sqrt{-3}$, à ± 2; on a donc :

$$x=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x=\frac{-1}{2},$$

et les fractions $\frac{3}{2}$ et $\frac{-1}{2}$ reviennent sur-le-champ à 5 et 3 relativement à 7. Ainsi 3 et 5 sont les deux racines primitives de 7.

35. On peut encore s'y prendre d'une manière plus simple dans cet exemple et dans tous les autres. Si l'on considère une racine primitive de $x^2-1=0$, et une racine primitive de $x^3-1=0$, leur produit sera une racine primitive de $x^6-1=0$: or l'équation $x^2-1=0$ donne -1 pour sa racine primitive; $x^3-1=0$ donne $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ pour ses deux racines primitives; on a donc pour l'expression de la racine primitive de 7, le produit de -1 par $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, ce qui donne $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, comme ci-dessus.

36. Soit $p=11$. Il est clair que la racine primitive de $x^{10}-1=0$ est exprimée généralement par

$$x=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

Or, $\sqrt{5}=\sqrt{(5+11)}=\sqrt{16}=4$, d'où $2\sqrt{5}=8$. Actuellement,

$$\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}=\sqrt{-2}=\sqrt{(-2+11)}=\sqrt{9}=3;$$

d'où $x = \frac{1+4+3}{4} = 2$. Ainsi 2 est une racine primitive de 11.

On trouverait les trois autres par l'ambiguité de $\sqrt{5}$ combinée avec celle du radical $\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}$.

Prenons ce dernier radical en *moins*, et nous aurons :

$$x = \frac{1+4-3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1+11}{2} = 6.$$

Prenons le radical $\sqrt{5}$ en *moins* dans les deux formules, et l'on aura :

$$x = \frac{1-4\pm\sqrt{-18}}{4} = \frac{-3\pm\sqrt{4}}{4} = \frac{-3\pm 2}{4} = \frac{-1}{4} \text{ et } \frac{-5}{4};$$

et ces deux fractions $\frac{-5}{4}$ et $\frac{-1}{4}$, relativement à 11, reviennent aux entiers 7 et 8.

Ainsi 2, 6, 7, 8, sont les quatre racines primitives de 11, comme on peut le vérifier.

Soit $p = 13$: je prends les deux racines primitives $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ de $x^3-1=0$, et les deux racines primitives $\pm\sqrt{-1}$, de $x^4-1=0$; et j'ai pour la racine primitive de $x^{3.4}-1=0$ ou de $x^{12}-1=0$, le produit $\pm\sqrt{-1}\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$. Il ne s'agit plus que d'évaluer cette expression relativement à 13.

Or $\sqrt{-1} = \sqrt{(-1+2.13)} = \pm 5$; ensuite le radical

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-3+3.13)} = \pm 6;$$

donc le facteur $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ revient à $\frac{5}{2}$ et à $\frac{-7}{2}$ ou à 9 et 3; donc on a :

$$x = \pm 5 \times 9 \quad \text{et} \quad x = \pm 5 \times 3.$$

Ce qui donne, en réduisant, $x = \pm 6$ et $x = \pm 2$; ou, si l'on veut,

$x = 6, 7, 2, 11$, qui sont effectivement les quatre racines primitives de 13.

Soit encore $p = 17$; il faut d'abord chercher une racine primitive de $x^{16} - 1 = 0$, où l'exposant 16 est une puissance du nombre premier 2. Considérez donc le diviseur binome de ce degré, c'est-à-dire, l'équation $x^2 - 1 = 0$; vous avez d'abord -1 pour sa racine primitive : donc $\pm\sqrt{-1}$ sont les deux racines primitives de $x^4 - 1 = 0$; donc $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ est l'expression des quatre racines primitives de $x^8 - 1 = 0$, et enfin $\sqrt{\pm\sqrt{(\pm\sqrt{-1})}}$ est l'expression des huit racines primitives de $x^{16} - 1 = 0$, et par conséquent correspond aux 8 racines primitives de 17.

Or, $-1 = -1 + 17 = 16$; donc $\pm\sqrt{-1} = \pm 4$; donc

$$\sqrt{(\pm\sqrt{-1})} = \pm 2 \quad \text{et} \quad \pm 2\sqrt{-1}; \text{ enfin}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}} = \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{-2},\ \pm\sqrt{(2\sqrt{-1})},\ \pm\sqrt{(-2\sqrt{-1})}:$$

or,

$$\sqrt{2} = \pm 6,\ \sqrt{-2} = \pm 7,\ \sqrt{(2\sqrt{-1} = \pm 12)},\ \sqrt{(-2\sqrt{-1})} = \pm 14.$$

et l'on a pour les 8 racines primitives de 17;

$$\pm 6,\quad \pm 7,\quad \pm 12,\quad \pm 14,$$

ou plus simplement :

$$\pm 6,\quad \pm 7,\quad \pm 5,\quad \pm 3.$$

Pour $p = 19$, on aurait $x^{18} - 1 = 0$; d'où, en écartant les racines qui appartiennent aux équations $x^9 - 1 = 0$ et $x^3 + 1 = 0$, il vient l'équation $x^6 - x^3 + 1 = 0$, qui renferme les racines primitives de $x^{18} - 1 = 0$, et qui nous donne ainsi :

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

pour l'expression générale des racines primitives de 19.

Autrement : comme on a $18 = 2.3.3$, considérez l'équation

$$x^2 - 1 = 0,$$

dont la racine primitive est -1 ; considérez ensuite l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

dont les deux racines primitives sont $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; et vous aurez $\sqrt[3]{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)}$ pour les racines primitives de $x^{3.3} - 1 = 0$. Donc, en multipliant par -1, vous aurez l'expression

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)}$$

pour les racines primitives de $x^{2.3.3} - 1 = 0$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

En développant ces valeurs, on a

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)},\quad x' = \alpha\sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)},\quad x'' = \alpha^2\sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)},$$

α et α^2 étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité ; c'est-à-dire, $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Or, $\sqrt{-3}$, relativement à 19, équivaut à $\sqrt{16} = \pm 4$; on trouvera donc :

$$x = \sqrt[3]{-7},\quad x' = 7\sqrt[3]{-7},\quad x'' = 11\sqrt[3]{-7},$$

$$x = \sqrt[3]{-11},\quad x' = 7\sqrt[3]{-11},\quad x'' = 11\sqrt[3]{-11}:$$

or, $\sqrt[3]{-7} = -4$ et $\sqrt[3]{-11} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ainsi l'on aura, en réduisant ces valeurs,

$$x = -4 \text{ et } 2,\quad x' = -9 \text{ et } -5,\quad x'' = -6 \text{ et } 3:$$

pour les six racines primitives de 19.

37. Considérons encore le nombre premier $p = 41$, et l'équation

$$x^{40} - 1 = 0.$$

Pour avoir les racines primitives imaginaires de cette équation, on peut d'abord écarter les racines qui appartiennent à l'équation $x^{20} - 1 = 0$; et l'on a l'équation $x^{20} + 1 = 0$; d'où, en rejetant les racines de $x^4 + 1 = 0$ qui appartiennent au diviseur binome $x^8 - 1 = 0$, il vient l'équation

$$x^{16} - x^{12} + x^8 - x^4 + 1 = 0,$$

qui renferme les seize racines primitives de $x^{40} - 1 = 0$. En faisant $x^4 = y$, on a :

$$y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0,$$

équation périodique qui donne :

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}}{4};$$

d'où l'on tire, à cause de $x^4 = y$,

$$x = \sqrt[4]{\left[\frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}}{4}\right]}.$$

Le radical 4.me se réduisant à deux radicaux carrés, on voit que cette formule ne contient que des radicaux carrés. Ainsi, en formant une table des carrés des nombres ± 1, ± 2, ± 3 jusqu'à ± 20; et de leurs moindres résidus à 41, on aura sous les yeux tous les élémens nécessaires pour effectuer sur-le-champ les opérations indiquées, et mettre en évidence les seize nombres entiers x, qui sont les racines primitives de 41.

Ainsi, l'on trouve d'abord que $\sqrt{5}$ vaut ± 13, et l'on a :

$$y = \frac{1 \pm 13 \pm \sqrt{(-10 \pm 26)}}{4},$$

d'où l'on tire :

$$y = 23 \text{ et } 25, \ 31 \text{ et } 4;$$

et il ne s'agit plus que d'avoir les racines 4.mes, des quatre nombres 23, 25, 31, 4.

Or, au moyen de la table, on trouve sur-le-champ :

1.° $\sqrt[4]{23} = \sqrt{\sqrt{23}}$; $\sqrt{23} = \pm 8$, $\sqrt{8} = \pm 7$, $\sqrt{-8} = \pm 19$;

2.° $\sqrt[4]{25} = \sqrt{\sqrt{25}}$; $\sqrt{25} = \pm 5$, $\sqrt{5} = \pm 13$, $\sqrt{-5} = \pm 6$;

3.° $\sqrt[4]{31} = \sqrt{\sqrt{31}}$; $\sqrt{31} = \pm 20$, $\sqrt{20} = \pm 15$, $\sqrt{-20} = \pm 12$;

4.° $\sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{4}}$; $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt{2} = \pm 17$, $\sqrt{-2} = \pm 11$.

Les 16 racines primitives de 41 sont donc :

$$\pm 7, \quad \pm 19, \quad \pm 6, \quad \pm 13, \quad \pm 12, \quad \pm 15, \quad \pm 11, \quad \pm 17.$$

Les quatre racines 4.mes de l'unité étant $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, donnent, relativement à 41, les nombres $1, -1, 9, -9$: si donc on multipliait une seule des racines 4.mes, de 23, comme 7, par exemple, par les quatre nombres successifs $1, -1, 9, -9$, on devrait retrouver aussi les quatre racines 4.mes de 23. Or, en faisant ces produits, on a :

$$7, \ -7, \ 9.7, \ -9.7, \text{ ou réduisant } 7, \ -7, \ -19, \ +19,$$

comme ci-dessus. Et l'on aurait les autres de la même manière.

Si l'on prenait encore les quatre racines primitives de $x^8 - 1 = 0$, qui sont marquées par $\sqrt[4]{-1}$ ou $\sqrt{\sqrt{-1}}$, et puis les quatre racines primitives de $x^5 - 1 = 0$, qui sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \mp 2\sqrt{5})}}{4}$, les seize produits deux à deux des premières par les secondes seraient les seize racines primitives de $x^{40} - 1 = 0$. Or, pour $\sqrt{\sqrt{-1}}$, on trouve les quatre nombres $3, -3, 14, -14$; et pour les racines de $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0$, les quatre nombres $18, 16, 10, 37$. Multipliant et réduisant, il vient les seize racines primitives trouvées plus haut.

... pas davantage ces applications particulières, ... le lecteur peut varier à son gré. En général, si l'on veut avoir les racines primitives imaginaires de l'équation binome $x^N - 1 = 0$, on décomposera N en ses facteurs les plus simples, de manière qu'on ait : $N = a^\lambda . b^\mu . c^\nu . \ldots$; a, b, c ... étant des facteurs premiers absolument ; on prendra les racines primitives des équations

$$x^{a^\lambda} - 1 = 0, \quad x^{b^\mu} - 1 = 0, \quad \&c.;$$

et si on les désigne par x' pour la première équation, par x'' pour la seconde, par x''' pour la troisième, &c., tous les produits $x'.x''.x'''\ldots$ qu'on pourra faire, seront des racines primitives de la proposée.

Pour avoir les racines primitives de chaque équation particulière, telle que $x^{a^\lambda} - 1 = 0$, on prendra les $a - 1$ racines primitives de l'équation $x^a - 1 = 0$, on en tirera la racine $a^{\lambda-1}.^{me}$; ou, ce qui revient au même, on en prendra $\lambda - 1$ fois de suite la racine du degré a, et l'on aura les racines primitives de $x^{a^\lambda} - 1 = 0$. Ces racines seront donc au nombre de $a^{\lambda-1}(a-1)$, puisque le radical du degré $a^{\lambda-1}$ a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans ce degré.

Au reste, on peut voir facilement, d'une autre manière, que les racines primitives de $x^{a^\lambda} - 1 = 0$ sont au nombre de $a^{\lambda-1}(a-1)$ ou $a^\lambda - a^{\lambda-1}$; car le nombre a étant premier, a^λ n'a pas au-dessous de lui de plus grand diviseur que $a^{\lambda-1}$, et par conséquent le binome $x^{a^\lambda} - 1$ n'a pas, après lui, de diviseur binome plus élevé que $x^{a^{\lambda-1}} - 1$, et ce diviseur contient tous les facteurs binomes de degrés inférieurs qui peuvent diviser la proposée $x^{a^\lambda} - 1 = 0$: si donc on rejette, des a^λ racines de cette équation, les $a^{\lambda-1}$ racines qui lui sont communes avec l'équation $x^{a^{\lambda-1}} - 1 = 0$, il restera $a^\lambda - a^{\lambda-1}$ racines uniquement propres à l'équation $x^{a^\lambda} - 1 = 0$, et qui en seront ainsi les racines primitives.

Mais, d'un autre côté, suivant notre théorème général, les racines de cette équation sont représentées par les racines de $x^p - 1 = 0$; c'est-à-dire, par les racines p.^{mes} de l'unité. Donc la formule générale des racines p.^{mes} de l'unité, étant rapportée au module particulier p, doit devenir entièrement rationnelle, et même délivrée de toute équivoque de signes radicaux, afin de donner toutes ses valeurs égales entre elles et à l'unité.

Cette expression est, comme on sait, de la forme $x = \frac{-1}{p-1} + \phi$, en désignant par ϕ toute la partie qui est affectée de radicaux. Or, la première partie rationnelle $\frac{-1}{p-1}$, étant rapportée à p, équivaut à l'unité; on a donc $x = 1 + \phi$; et par conséquent, toute la partie radicale ϕ, rapportée à p, doit disparaître d'elle-même, afin qu'il ne reste plus aucun radical, et que toutes les valeurs de la formule se réduisent à la même valeur $x = 1$. Mais les radicaux de ϕ, que nous avons désignés précédemment par $\sqrt[p-1]{\theta}$, $\sqrt[p-1]{\theta'}$, &c., ne peuvent tous disparaître, à moins que les expressions θ, θ', &c. ne contiennent le nombre p par-tout facteur dans leurs différens termes.

40. On a donc ce théorème nouveau et très-remarquable, que j'ai avancé dans mon dernier Mémoire. Si l'on considère la formule générale des racines imaginaires de l'unité, d'un degré quelconque premier p, supérieur à 2, on trouvera nécessairement l'exposant p de ces racines par-tout facteur des divers nombres qui entrent sous les radicaux de cette formule : de manière que si l'on négligeait par-tout ce nombre p, en le comptant comme nul, tous ces radicaux disparaîtraient d'eux-mêmes, et que la formule se réduirait uniquement à la partie rationnelle $\frac{-1}{p-1}$, qui, relativement à p, équivaut à l'unité.

41. C'est ce que vous pouvez reconnaître dans les expressions précédentes des racines 3.mes, 5.mes et 7.mes de l'unité.

Par exemple, la formule des racines cubiques imaginaires de l'unité,

est $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, où vous voyez que l'exposant 3 entre comme facteur sous le radical; de sorte que, relativement au module 3, cette formule se réduit à $\frac{-1}{2}$ ou à l'unité.

La formule de la racine 5.me imaginaire de l'unité, est

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4},$$

où vous voyez que l'exposant 5 est facteur des divers nombres soumis aux radicaux. Si donc vous rapportez cette formule au nombre premier 5, tous les radicaux disparaissent, et il ne reste que $\frac{-1}{4}$, qui, relativement à 5, équivaut à 1; comme cela doit être.

Pour les racines 7.mes imaginaires de l'unité, nous avons trouvé :

$$\frac{-1+\sqrt{-7}}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

où l'on voit le nombre 7 facteur de tous les nombres qui sont sous les divers radicaux. Ainsi, en rapportant cette formule à 7, on a :

$$\sqrt{-7}=0,\quad \sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}=0,$$

à cause de $21=3.7$; et toute la formule est délivrée d'ambiguité, et donne simplement $\frac{-1}{6}$, qui, relativement à 7, vaut l'unité.

Et l'on peut vérifier le même théorème dans l'expression de la racine 11.me, 13.me, 17.me, &c. de l'unité, si l'on se donne la peine de développer ces racines. On y trouvera par-tout comme facteurs sous les radicaux, les exposans respectifs 11, 13, 17, &c. de ces racines imaginaires.

42. De ces mêmes principes, vous pouvez encore tirer une conséquence remarquable sur l'équation qui a pour racines les différentes sommes des racines imaginaires de l'équation $X=\frac{x^p-1}{x-1}=0$, lorsqu'on les distribue en plusieurs groupes semblables.

Soit $p - 1 = \lambda m$; et les $p - 1$ racines imaginaires de la proposée $X = 0$, pourront se distribuer en λ groupes composés de m racines

$$r, \; r^{a}, \; r^{a^2}, \; r^{a^3}, \; \ldots\ldots \; r^{a^{m-1}};$$

a étant une racine primitive de $x^m - 1 = Mp$. Si, dans ce groupe de racines ainsi conjuguées, vous changez une racine en une autre quelconque du même groupe, toutes les racines restent les mêmes et gardent entre elles le même ordre; ce qui est évident. Mais si vous changez la racine désignée par r en une autre r^e qui ne fait point partie du groupe, toutes les racines changent à-la-fois, et le groupe tout entier se change dans le groupe semblable:

$$r^e, \; r^{ea}, \; r^{ea^2}, \; r^{ea^3}, \; \ldots\ldots \; r^{ea^{m-1}};$$

et ainsi des autres. Soit donc u la somme des m racines de l'une de ces λ groupes; et l'on aura u par une équation du degré λ, et qui sera de la forme:

$$U = u^{\lambda} + Au^{\lambda-1} + Bu^{\lambda-2} + Cu^{\lambda-3} + \&c. + T = 0;$$

et il est facile de voir que les fonctions invariables A, B, C, &c. des racines u, seront des fonctions invariables des racines r de la proposée, et même se réduiront à des nombres entiers. Or, sans connaître les coefficiens A, B, C, &c. T, je dis qu'ils équivalent aux résidus des coefficiens du binome développé $(u - m)^{\lambda}$; c'est-à-dire, du polynome:

$$u^{\lambda} - \lambda m u^{\lambda-1} + \frac{\lambda . \lambda - 1}{2} m^2 . u^{\lambda-2} - \&c. \pm m^{\lambda};$$

et qu'ainsi on a, aux multiples près de p, les équations remarquables:

A, B, C, &c. de l'équation $U = 0$, en ne considérant que leurs valeurs résidues relativement à $p = \lambda m + 1$.

43. Soit, par exemple, $\lambda = 2$, et par conséquent $p = 2m + 1$; on aura, pour les deux sommes u et u' des m racines conjuguées de l'équation $x^p - 1 : x - 1 = X = 0$, l'équation du second degré

$$u^2 + Au + B = 0.$$

Or, $u = m$ élevé au carré donne $u^2 - 2m.u + m^2$. Ainsi l'on doit avoir $A = -2m$, ou en ajoutant p, $A = 1$. Ensuite on aura $B = m^2$, ou, en prenant le résidu de m^2 par rapport à p, $B = \frac{-m}{2}$, si m est pair; $B = \frac{m+1}{2}$, si m est impair. En effet, en divisant m^2 par $p = 2m + 1$, on a le quotient $\frac{m}{2}$, et le reste $\frac{-m}{2}$, tous deux entiers, si m est pair.

Si m est impair, $\frac{-m}{2}$ équivaut à l'entier $\frac{m+1}{2}$, comme il est très-facile de le voir : ou autrement, si m est impair, m^2 peut être changé en $m^2 + 2m + 1$, et divisant par $2m + 1$, il vient le quotient $\frac{m+1}{2}$ et le reste $\frac{m+1}{2}$, tous deux entiers.

Ainsi, dans le cas de $p = 2m + 1$, on a pour l'équation du second degré $u^2 + Au + B = 0$, les équations suivantes :

$$u^2 + u - \frac{m}{2} = 0, \quad \text{ou} \quad u^2 + u + \frac{m+1}{2} = 0,$$

selon que m est pair ou impair.

On a donc : $u = \frac{-1 \pm \sqrt{p}}{2}$, ou $u = \frac{-1 \pm \sqrt{-p}}{2}$, selon que p est de la forme $4i + 1$ ou de la forme $4i - 1$; ce qui s'accorde parfaitement avec le théorème donné par M. *Gauss*.

44. Si $\lambda = 3$, et par conséquent si $p = 3m + 1$, on a pour l'équation $U = u^3 + Au^2 + Bu + C = 0$, les valeurs suivantes :

$$A = 1, \quad B = \frac{m+1}{2}, \quad C = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2m+1}{3}.$$

$\frac{m+1}{2}$ peut se changer généralement dans l'entier négatif $-m$; car en doublant, on a $m+1$, qui équivaut à $-2m$ relativement à $p = 3m+1$. Ainsi l'on a : $B = -m$. Ensuite, comme $2m+1$ équivaut à $-m$, le coefficient $\frac{m+1}{2} \cdot \frac{2m+1}{3}$ pourra se changer en $\frac{m^2}{3}$, ou plutôt, en $\frac{-ip+m^2}{3}$, en ôtant au numérateur un certain multiple de p qui rende possible la division par 3. Ainsi le coefficient C sera égal à un entier de la forme $\frac{m^2-ip}{3}$, où l'indéterminée i dépend de la nature du nombre m.

Si $p = 19 = 3.6+1$, on a $m = 6$, et

$$C = \frac{m^2-ip}{3} = \frac{6^2-3.19}{3} = -7.$$

Si $p = 31 = 3.10+1$, on a $m = 10$, et

$$C = \frac{m^2-ip}{3} = \frac{10^2-4.31}{3} = -8.$$

Si $p = 37 = 3.12+1$, on a $m = 12$, et

$$C = \frac{m^2-ip}{3} = \frac{12^2-3.37}{3} = 11.$$

Si $p = 43 = 3.14+1$, on a $m = 14$, et

$$C = \frac{m^2-ip}{3} = \frac{14^2-4.43}{3} = 8;$$

&c. &c.

45. Mais ces dernières applications méritent d'être approfondies et développées avec plus d'étendue dans un autre Mémoire. Je me contente ici d'avoir démontré notre théorème général sur les équations binomes, de l'avoir éclairci par de nombreux exemples, et d'en avoir tiré, pour

l'algèbre et pour l'analyse indéterminée, quelques vérités nouvelles qu'il serait comme impossible d'obtenir par une autre voie.

Je reviendrai ailleurs sur ce rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres; et je ferai voir que les principes généraux de l'analyse mathématique ont leur source naturelle dans la simple considération de l'*ordre*, ou de la disposition mutuelle qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets : ce qui me paraît le plus haut point d'abstraction et de généralité où il soit permis de porter la science.

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Au commencement de ce Mémoire (n.° 3), j'ai fait, en passant, quelques réflexions sur la liaison nécessaire qui existe entre l'algèbre et la théorie de l'ordre, et j'ai montré comment l'esprit aurait dû être conduit naturellement à regarder les racines de l'unité dans cet ordre remarquable où elles naissent l'une de l'autre par une même loi de formation. On a vu que cette disposition des racines n'a rien d'indirect ni d'arbitraire, comme on l'avait cru d'abord, mais qu'elle vient, au contraire, de la nature même de ces racines, qui est de pouvoir être toutes représentées à l'aide d'une seule r, et d'un seul nombre a; ce qui en détermine le véritable ordre naturel.

Mais on pourrait dire que ce nombre ou exposant, que j'ai désigné par a, n'est point unique; car il y a toujours, pour un même nombre premier n, plusieurs racines primitives a, b, c, d, &c.; et l'on sait qu'il y en a autant que de nombres inférieurs et premiers à $n - 1$, comme *Euler* l'a fait voir. On pourrait donc considérer également plusieurs ordres dus à ces racines primitives différentes a, b, c, d, &c., et prendre indifféremment :

ou l'ordre $r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3}$, &c. $r^{a^{n-2}}$,

ou l'ordre $r,\ r^b,\ r^{b^2},\ r^{b^3}$, &c. $r^{b^{n-2}}$,

ou l'ordre $r,\ r^c,\ r^{c^2},\ r^{c^3}$, &c. $r^{c^{n-2}}$,

&c. &c.

d'où il paraît que, dans la représentation et la disposition mutuelle des racines de l'unité, il reste encore quelque chose d'indéterminé et d'arbitraire.

Mais je vais faire voir que ces différens ordres sont le même au fond; c'est-à-dire, qu'un seul quelconque d'entre eux renferme actuellement tous les autres.

Et en effet, considérez l'un d'eux, comme le premier, par exemple, qui est représenté par

$$r, \ r^a, \ r^{a^2}, \ r^{a^3}, \ \&c. \ r^{a^{n-2}},$$

et prenez-y les racines, non pas de suite ou de 1 en 1, mais en sautant de l'une à l'autre par un intervalle constant h inférieur et premier à leur nombre $n - 1$. Il est clair que vous passerez nécessairement par toutes les racines avant de revenir à celle d'où vous êtes parti, et que vous aurez ainsi vos $n - 1$ racines rangées dans le nouvel ordre :

$$r, \ r^{a^h}, \ r^{a^{2h}}, \ r^{a^{3h}}, \ \&c. \ r^{a^{(n-2)h}}.$$

Or cette suite peut être vue comme si elle était formée directement au moyen d'un nouvel exposant marqué par a^h; d'où l'on voit d'abord que si a est une racine primitive de n, la puissance a^h en doit être une autre b, et qu'ainsi le nouvel ordre tiré du premier, en y prenant les racines de h en h, n'est autre chose que l'un de ceux que je considérais tout-à-l'heure, tel que l'ordre

$$r, \ r^b, \ r^{b^2}, \ r^{b^3}, \ \&c. \ r^{b^{n-2}},$$

dû à la racine primitive b égale à a^h.

Ainsi les différens ordres qu'on peut former en employant les différentes racines primitives de n, sont comme un seul et même ordre, mais où l'on regarderait les $n-1$ racines r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, &c. soit de suite ou de 1 en 1, soit de h en h, soit de h' en h', &c.; 1, h, h', &c., étant les différens nombres inférieurs et premiers à $n - 1$. Et comme l'idée de cet intervalle plus ou moins grand, par lequel on va de l'une à l'autre, ne peut entrer dans l'idée de l'*ordre*, qui, par sa nature, ne dépend point de la *grandeur*, il s'ensuit que ces différens ordres coexis-

tent tous dans un seul quelconque d'entre eux, comme les racines d'une même équation, sans qu'on puisse les distinguer ou les isoler par aucune analyse. C'est une multiplicité toute semblable à celle qui existe entre les différentes espèces de polygones réguliers d'un même nombre de côtés. L'analyse ne peut jamais séparer ces figures ; et si l'on cherche, par exemple, dans quel cercle on peut inscrire un eptagone régulier d'un côté donné, on trouve à-la-fois trois cercles différens qui répondent aux trois espèces d'eptagones réguliers qu'on peut également construire sur un même côté donné. Ou réciproquement, si l'on cherche le côté d'un eptagone régulier à inscrire dans un cercle donné, on trouve à-la-fois trois côtés différens qui donnent également les trois eptagones qu'on pourrait inscrire dans le même cercle; et il en est ainsi des autres polygones réguliers, dont les espèces sont liées entre elles d'une manière aussi inséparable que les racines d'une même équation.

Mais pour saisir encore mieux cette démonstration délicate que j'ai ici en vue, je vais la suivre dans un exemple particulier : le raisonnement y sera plus clair et plus sensible, et ne perdra rien de sa généralité.

Considérons, entre autres, les douze racines imaginaires de l'équation binome $x^{13}-1=0$; on aura donc ici $n=13$: et comme 2 est une des racines primitives du nombre premier 13, les douze racines imaginaires de $x^{13}-1=0$ pourront se mettre dans l'ordre où elles naissent l'une de l'autre par la puissance 2.me; c'est-à-dire, en faisant continuellement le *carré* de celle qui est produite ; et l'on aura ainsi l'ordre :

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11},\ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7.$$

Mais les nombres 6, 11, 7 étant les trois autres racines primitives de 13, on pourrait également considérer les trois ordres nouveaux dûs aux puissances 6.me, 11.me, 7.me ; savoir :

$$r,\ r^6,\ r^{10},\ r^8,\ r^9,\ r^2,\ r^{12},\ r^7,\ r^3,\ r^5,\ r^4,\ r^{11};$$

$$r,\ r^{11},\ r^4,\ r^5,\ r^3,\ r^7,\ r^{12},\ r^2,\ r^9,\ r^8,\ r^{10},\ r^6;$$

$$r,\ r^7,\ r^{10},\ r^5,\ r^9,\ r^{11},\ r^{12},\ r^6,\ r^3,\ r^8,\ r^4,\ r^2:$$

ce qui fait en tout quatre manières différentes de ranger par une même loi les douze racines imaginaires de $x^{13}-1=0$. Mais 1, 5, 7 et 11 étant les quatre nombres inférieurs et premiers à 12, ces quatre ordres différens peuvent se voir en même temps dans l'un quelconque d'entre eux, en y regardant les racines prises successivement, ou de 1 en 1, ou de 5 en 5, ou de 7 en 7, ou de 11 en 11. Ainsi, en partant du premier ordre, par exemple, qui est dû à la racine primitive 2, on trouvera successivement le 2.me, le 3.me et le 4.me ordres dus aux exposans respectifs 2^5, 2^7, 2^{11}, lesquels reviennent aux trois autres racines primitives de 13, savoir : 6, 11 et 7.

Mais pour plus de clarté encore, rangez vos douze racines en cercle dans l'un quelconque de ces quatre ordres, comme le premier, par exemple :

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11},\ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7,$$

et je dis que les trois autres sont actuellement compris dans celui-là, ou plutôt sont le même, vu de différentes manières. Et par exemple, le second ordre n'est autre chose que le premier dont les termes consécutifs seraient encore rangés de même, non pas en faisant une seule fois le tour de la circonférence du cercle, mais en faisant cinq fois le tour de cette même circonférence. Le 3.me ordre n'est encore que le premier dont les termes seraient placés de même, l'un après l'autre, mais sur la septuple circonférence ; et le 4.me est encore la même suite de racines, mais distribuées en faisant onze fois le tour du cercle. Et comme ces multiples du cercle se confondent toujours et se réduisent au simple cercle, il en résulte que la figure doit présenter aux yeux quatre ordres différens, tandis que l'esprit peut les voir tous comme un seul et même ordre.

Ou bien réciproquement, si vous vouliez distinguer les quatre suites différentes de vos douze racines, imaginez qu'on range les racines de la première sur le simple cercle ; celles de la seconde, sur le quintuple

cercle; celles de la troisième, sur le septuple cercle; et enfin, celles de la quatrième, sur onze fois le cercle; et vous aurez une même figure, qui n'offrira plus aux yeux qu'un seul et même ordre : et comme cet ordre unique provient également de vos quatre suites différentes, il est clair qu'on ne peut demander à quelle suite particulière il est dû de préférence. D'où vous voyez enfin que ces différens ordres ne peuvent se distinguer par aucune analyse, et qu'on les a tous à-la-fois dans un seul quelconque d'entre eux, comme les signes équivoques d'une même formule radicale.

C'est d'ailleurs ce qui résulte assez directement de notre théorie; car la racine primitive d'un nombre premier n étant généralement exprimée par la racine imaginaire primitive de l'équation $x^{n-1} - 1 = 0$. Si l'on emploie cette expression algébrique, que je désigne par α, au lieu de l'exposant entier a, on aura, pour les $n - 1$ racines imaginaires de l'équation $x^n - 1 = 0$, cette représentation générale :

$$r, \quad r^{\alpha}, \quad r^{\alpha^2}, \quad r^{\alpha^3}, \quad \&c. \quad r^{\alpha^{n-2}};$$

qui renferme indifféremment tous les ordres semblables qu'on pourrait considérer, parce que l'exposant algébrique α y répond actuellement, par l'équivoque de ses signes radicaux, à telle racine primitive de n qu'on voudra choisir. Mais on était loin de songer à mettre des imaginaires à la place d'exposans entiers, quoiqu'il eût été facile de reconnaître ici l'équivalence de ces exponentielles, par la condition continuelle de $r^n = 1$, ce qui permet d'ajouter ou d'omettre à volonté le nombre n dans toutes ces expressions.

Quoi qu'il en soit, le grand avantage de cet ordre donné par la génération successive des racines de l'unité, consiste d'abord en ce qu'on y voit au premier coup-d'œil, non-seulement que ces racines sont liées deux à deux, ou sont réciproques, comme on le savait depuis long-temps; mais encore, qu'elles sont liées trois à trois, quatre à quatre, et

en général, d à d; si 3, 4, &c. d, sont aussi des diviseurs de leur nombre $n - 1$.

Ainsi, dans l'exemple précédent, 3 étant un diviseur de 12, considérez la suite

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11},\ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7,$$

et prenez-y les racines en allant de $\frac{12}{3}$ en $\frac{12}{3}$, c'est-à-dire de 4 en 4; et vous aurez ces quatre groupes :

$$(r,\ r^3,\ r^9),\quad (r^2,\ r^6,\ r^5),\quad (r^4,\ r^{12},\ r^{10}),\quad (r^8,\ r^{11},\ r^7),$$

dont les racines seront inséparables : je veux dire que si vous changez une racine en une autre du même groupe, chaque groupe conservera encore les mêmes racines, et restera à sa place; et que si vous échangez les racines, d'un groupe à l'autre, les groupes tout entiers s'échangeront entre eux, entraînant toujours leurs mêmes racines.

Si donc vous cherchez une fonction symétrique quelconque des trois racines r, r^3, r^9, vous trouverez cette fonction par une simple équation du 4.me degré; car, en dénotant, pour abréger, cette fonction par $\varphi(r)$, il est clair qu'elle n'aura que ces quatre valeurs différentes :

$$\varphi(r),\quad \varphi(r^2),\quad \varphi(r^4),\quad \varphi(r^8);$$

de sorte que la somme de ces fonctions semblables, la somme de leurs produits deux à deux, celle des produits trois à trois, quatre à quatre, seront des fonctions invariables des racines r, r^2, r^3, r^4, &c. de la proposée, et pourront se déterminer rationnellement par les coefficiens de cette équation.

Mais, de plus, le nombre de nos groupes étant encore divisible par deux, vous pouvez les conjuguer eux-mêmes en les prenant de deux en deux dans la suite précédente, et former ainsi ces deux groupes composés :

$$\{\varphi(r),\ \varphi(r^4)\},\ \{\varphi(r^2),\ \varphi(r^8)\};$$

dont les parties ne se sépareront pas, malgré l'échange des racines r, r^2, r^3, &c. : d'où l'on voit que l'équation précédente du 4.me degré peut se résoudre par deux autres du second; et qu'ainsi, l'équation

$$x^{12} + x^{11} + x^{10} + \&c. + x + 1 = 0$$

peut se réduire à des équations inférieures de degrés marqués par les diviseurs simples du nombre 12.

En second lieu, vous voyez par ce même ordre des racines, que chacune de ces équations réduites n'a que la difficulté d'une équation binome du même degré. Considérez, par exemple, les quatre fonctions précédentes,

$$\varphi(r),\ \varphi(r^2),\ \varphi(r^4),\ \varphi(r^8).$$

Si vous y faites un échange quelconque de racines, il est clair que ces quatre fonctions gardent toujours entre elles le même ordre, et ne font que s'avancer à-la-fois d'un même nombre de places; de sorte que les vingt-quatre permutations dont quatre choses sont généralement susceptibles, se réduisent ici à quatre, par le lien mutuel des racines que l'on considère. Mais, d'un autre côté, si l'on prend la fonction linéaire

$$t = \varphi(r) + \alpha\varphi(r^2) + \alpha^2\varphi(r^4) + \alpha^3\varphi(r^8),$$

où α est une des racines de $x^4 - 1 = 0$, on voit aussi qu'en multipliant cette fonction t par α^3, puis par α^2, puis par α, on aura le même résultat que si l'on faisait avancer à-la-fois toutes les racines d'une, ou de deux, ou de trois places; qu'ainsi donc, si l'on élève tout d'un coup la fonction t à la 4.me puissance, on épuisera les quatre seules permutations dont les racines $\varphi(r)$, $\varphi(r^2)$, &c. y sont susceptibles, et qu'on n'aura pour t^4 qu'une seule valeur, quelque échange qu'on veuille faire actuellement entre les racines. Donc, en remettant le radical 4.me sur cette puissance de t, qui nous sera connue, on aura

immédiatement la valeur de cette fonction proposée. Donc, si l'on emploie de même, au lieu de α, les trois autres racines de $x^4 - 1 = 0$, on pourra connaître ainsi trois nouvelles fonctions linéaires t', t'', t''' des quatre racines $\phi(r)$; et de ces quatre fonctions on tirera sur-le-champ, sans ambiguité, les quatre racines inconnues :

$$\phi(r), \quad \phi(r^2), \quad \phi(r^4), \quad \phi(r^8).$$

Et il est manifeste que cette analyse s'étend, sans aucune difficulté, à toutes les équations qui proviendraient de l'équation binome $x^n - 1 = 0$.

Ainsi, la résolution immédiate de l'équation $x^n - 1 : x - 1 = 0$, ou sa résolution par d'autres degrés inférieurs diviseurs de $n - 1$, ou la résolution de ces réduites, ou celle de toute équation qui dépendrait des mêmes racines, devient claire et facile par cette seule considération de l'ordre qu'on établit d'abord entre les racines de la proposée.

SUR
LES RACINES IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS;

PAR A. L. CAUCHY.

QU'IL soit toujours possible de décomposer un polynome en facteurs réels du premier et du second degré; ou, en d'autres termes, que toute équation dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de la variable x, puisse toujours être vérifiée par des valeurs réelles ou imaginaires de cette variable : c'est une proposition que l'on a déjà prouvée de plusieurs manières. MM. *Lagrange*, *Laplace* et *Gauss* ont employé diverses méthodes pour l'établir; et j'en ai moi-même donné une démonstration fondée sur des considérations analogues à celles dont M. *Gauss* a fait usage. Mais, dans chacune des méthodes que je viens de citer, on fait une attention spéciale au degré de l'équation donnée, et quelquefois même on remonte de cette dernière à d'autres équations d'un degré supérieur. Ces considérations paraissent étrangères à la question, et M. *Legendre* est parvenu à s'en passer (*Théorie des Nombres*, I.re partie, §. 14), en faisant usage du développement en série. Je suis arrivé, en suivant la même idée, à une démonstration qui semble aussi directe et aussi simple qu'on puisse le desirer. Je vais ici l'exposer en peu de mots.

Soit $f(x)$ un polynome quelconque en x. Si l'on y substitue pour x une valeur imaginaire $u + v\sqrt{-1}$, on aura

$$(1) \qquad f(u + v\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

P et Q étant deux fonctions réelles de u et v. De plus, si l'on fait

$$(2) \qquad P + Q\sqrt{-1} = R\,(\cos. T + \sqrt{-1}\,\sin. T),$$

R sera ce qu'on appelle le module de l'expression imaginaire

$$P + Q\sqrt{-1},$$

et sa valeur sera donnée par l'équation

$$(3) \qquad R^2 = P^2 + Q^2.$$

Cela posé, le théorème à démontrer, c'est que l'on pourra toujours satisfaire par des valeurs réelles de u et de v aux deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0;$$

ou, ce qui revient au même, à l'équation unique

$$R = 0.$$

Il importe donc de savoir quelles sont les diverses valeurs que peut recevoir la fonction R, et comment cette fonction varie avec u et v. On y parviendra comme il suit.

Supposons que les quantités u et v obtiennent à-la-fois les accroissemens h et k, et soient ΔP, ΔQ, ΔR, les accroissemens correspondans de P, Q, R. Les équations (3) et (1) deviendront respectivement :

$$(4) \qquad (R + \Delta R)^2 = (P + \Delta P)^2 + (Q + \Delta Q)^2;$$

$$(5)\left\{\begin{aligned} & P + \Delta P + (Q + \Delta Q)\sqrt{-1} = f(u + v\sqrt{-1} + h + k\sqrt{-1}) \\ & = f(u + v\sqrt{-1}) + (h + k\sqrt{-1})\,f_1(u + v\sqrt{-1}) \\ & \qquad + (h + k\sqrt{-1})^2 f_2(u + v\sqrt{-1}) + \&c.; \end{aligned}\right.$$

f_1, f_2, &c. .... désignant de nouvelles fonctions. Pour déduire de l'équation (5) les valeurs de $P + \Delta P$ et de $Q + \Delta Q$, il suffit de ramener

le second membre à la forme $p + q\sqrt{-1}$. C'est ce que l'on fera en substituant à $f(u+v\sqrt{-1})$ sa valeur R (cos. $T + \sqrt{-1}$ sin. T), et posant, en outre:

$$h + k\sqrt{-1} = \rho\,(\cos.\,\theta + \sqrt{-1}\,\sin.\,\theta),$$
$$f_1\,(u+v\sqrt{-1}) = R_1\,(\cos.\,T_1 + \sqrt{-1}\,\sin.\,T_1),$$
$$f_2\,(u+v\sqrt{-1}) = R_2\,(\cos.\,T_2 + \sqrt{-1}\,\sin.\,T_2);$$
&c. . . .

Après les réductions effectuées, l'équation (5) deviendra:

$$(6)\left\{\begin{aligned} &P+\Delta P+(Q+\Delta Q)\sqrt{-1}) = R\cos.\,T + R_1\,\rho\cos.\,(T_1+\theta) \\ &\qquad\qquad + R_2\,\rho^2\cos.\,(T_2+2\,\theta) + \&c. \\ &+[R\sin.T+R_1\,\rho\sin.(T_1+\theta)+R_2\,\rho^2\sin.(T_2+2\theta)+\&c.\,\sqrt{-1}\,; \end{aligned}\right.$$

et l'on en conclura :

$$(7)\left\{\begin{aligned} &P+\Delta P = R\cos.\,T+R_1\,\rho\cos.\,(T_1+\theta)\,R_2\,\rho^2\cos.(T_2+2\theta)+\ldots; \\ &Q+\Delta Q = R\sin.\,T+R_1\,\rho\sin.\,(T_1+\theta)\,R_2\,\rho^2\sin.\,(T_2+2\theta)+\ldots; \end{aligned}\right.$$

$$(8)\left\{\begin{aligned} &(R+\Delta R)^2 = [R\cos.T+R_1\,\rho\cos.(T_1+\theta)+R_2\,\rho^2\cos.(T_1+2\theta)+\ldots]^2 \\ &\qquad +[R\sin.T+R_1\,\rho\sin.(T_1+\theta)+R_2\,\rho^2\sin.(T_2+2\theta)+\ldots]^2 \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que, pour certaines valeurs attribuées aux variables u et v, l'équation

$$R = 0$$

ne soit pas satisfaite. Si, dans cette hypothèse, R_1 n'est pas nul, le second membre de l'équation (8), ordonné suivant les puissances ascendantes de ρ, deviendra

$$R^2 + 2RR_1\,\rho\cos.\,(T_1 - T + \theta) + \&c. \ldots;$$

et par suite la quantité

$$(R + \Delta R)^2 - R^2,$$

ou l'accroissement de R^2 ordonné suivant les puissances ascendantes de ρ, aura pour premier terme

$$2 R R_1 \rho \cos.(T_1 - T + 2\theta).$$

Si, dans la même hypothèse, R_1 était nul, sans que R_2 le fût, l'accroissement de R^2 aurait pour premier terme

$$2 R R_2 \rho^2 \cos.(T_2 - T + 2\theta),$$

&c. ... Enfin ce premier terme deviendrait

$$2 R R_n \rho^n \cos.(T_n - T + n\theta),$$

si, pour les valeurs données de u et v, toutes les quantités R_1, R_2, ... s'évanouissaient jusqu'à R_{n-1} inclusivement. Dailleurs, si l'on attribue à ρ des valeurs positives très-petites, et à θ des valeurs quelconques; ou, ce qui revient au même, si l'on attribue aux quantités h et k des valeurs numériques très-petites, l'accroissement de R^2, savoir:

$$(R + \Delta R)^2 - R^2,$$

sera de même signe que son premier terme, représenté généralement par le produit

$$(9) \qquad 2 R R_n \rho^n \cos.(T_n - T + n\theta):$$

et comme on peut disposer de la valeur arbitraire de θ, de manière à rendre cos. $(T_n - T + n\theta)$, c'est-à-dire, le dernier facteur du produit (9), et par suite le produit lui-même, ou positif, ou négatif; il en résulte que, dans le cas où des valeurs particulières attribuées aux variables u et v ne vérifient pas l'équation $R = 0$, la valeur correspondante de R^2 ne peut être ni un *maximum* ni un *minimum*. Donc, si l'on

peut s'assurer, *à priori*, que R^2 admet une valeur *minimum*, on devra en conclure que cette valeur est nulle, et qu'il est possible de satisfaire à l'équation $R = 0$.

Or, R^2 admettra évidemment un *minimum* correspondant à des valeurs finies de u et de v, si, pour de très-grandes valeurs numériques de ces mêmes variables, R^2 finit par devenir supérieur à toute quantité donnée. D'ailleurs, si l'on fait

$$u + v\sqrt{-1} = r(\cos. z + \sqrt{-1}\sin. z),$$

à de très-grandes valeurs numériques de u et v correspondront de très-grandes valeurs de r, et réciproquement. Donc, pour que l'on puisse satisfaire à l'équation $R = 0$ par des valeurs réelles et finies des variables u et v, il est nécessaire et il suffit que la quantité R^2 déterminée par les équations

$$(10) \qquad \begin{cases} R^2 = P^2 + Q^2 \\ P + Q\sqrt{-1} = f[r(\cos. z + \sqrt{-1}\sin. z)] \end{cases}$$

finisse par devenir constamment, pour de très-grandes valeurs de r, supérieure à tout nombre donné.

La conclusion précédente subsiste également, que la fonction $f(x)$ soit entière ou non. Elle exige seulement que P et Q soient des fonctions continues des variables u et v, et que les quantités R_1, R_2, ... ne deviennent jamais infinies pour des valeurs finies de ces mêmes variables.

Supposons en particulier que la fonction $f(x)$ soit entière, et faisons en conséquence,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

$$P+Q\sqrt{-1}=f(r\cos.z+r\sin.z\sqrt{-1})$$

$$=a_0 r^n\cos.nz+a_1 r^{n-1}\cos.(n-1)z+\ldots+a_{n-1}r\cos.z+a_n$$

$$+[a_0 r^n\sin.nz+a_1 r^{n-1}\sin.(n-1)z+\ldots+a_{n-1}r\sin.z]\sqrt{-1},$$

$$P=a_0 r^n\left[\cos.nz+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{\cos.(n-1)z}{r}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{\cos.z}{r^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{r^n}\right],$$

$$Q=a_0 r^n\left[\sin.nz+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{\sin.(n-1)z}{r}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{\sin.z}{r^{n-1}}\right],$$

$$R^2=P^2+Q^2=a_0^2 r^{2n}\left[1+\frac{2a_1\cos.z}{a_0}\cdot\frac{1}{r}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_0}\right)^2\frac{1}{r^{2n}}\right].$$

Or, il est clair que, pour de très-grandes valeurs de r, la valeur précédente de R^2 finira par surpasser toute quantité donnée. Donc, en vertu de ce qui a été dit plus haut, l'on pourra satisfaire par des valeurs réelles de u et de v à l'équation

$$R=0,$$

ou, ce qui revient au même, aux deux suivantes,

$$P=0,\quad Q=0.$$

Au reste, la méthode ci-dessus exposée n'est pas uniquement applicable au cas où la fonction $f(x)$ est entière; et, lors même que cette fonction cesse de l'être, les raisonnemens dont nous avons fait usage peuvent servir à décider s'il est possible de satisfaire à l'équation

$$f(x)=0$$

par des valeurs réelles ou imaginaires de la variable x.



MÉMOIRE

Sur la Manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de quantités périodiques, et sur l'Usage de cette Transformation dans la Résolution de différens Problèmes ;

PAR M. POISSON.

LORSQU'ON applique l'analyse à des questions de physique ou de mécanique, ou même dans de simples problèmes de géométrie, on a quelquefois besoin d'exprimer des fonctions quelconques par des séries de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels à la variable. Dans certains cas, ces fonctions doivent être ainsi représentées pour toutes les valeurs réelles de la variable, depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif : les séries dont nous parlons se changent alors en des intégrales définies; et l'on en peut voir un exemple dans le problème de la propagation des ondes à la surface de l'eau, qu'on suppose indéfiniment prolongée (*). D'autres fois, les fonctions que l'on considère ne sont données que dans une étendue limitée des valeurs de la variable; ce n'est que pour ces valeurs que les fonctions doivent être réduites en séries de quantités périodiques, ou, si l'on veut, ce ne sont que des parties de fonctions auxquelles il s'agit alors de donner cette forme. Nous donnerons, dans ce Mémoire, plusieurs exemples de ces questions; mais

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1816.

auparavant nous allons rassembler les principales formules qui peuvent servir aux transformations de cette nature.

[1.] Soient y_1, y_2, y_3, ... y_{m-1}, des quantités données en nombre $m-1$; on pourra toujours représenter l'une d'entre elles, celle qui répond à l'indice quelconque n, par cette formule :

$$y_n = \Sigma z_i \sin. \frac{i n \pi}{m},$$

dans laquelle on a

$$z_i = \frac{2}{m} \Sigma' y_{n'} \sin. \frac{i n' \pi}{m};$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, i et n' des nombres entiers et positifs, et Σ et Σ' indiquant des sommes relatives à ces nombres, lesquelles doivent s'étendre depuis l'unité jusqu'à $m-1$ inclusivement.

Cette formule est tirée du premier Mémoire de *Lagrange* sur la *Théorie du son* (*) ; elle se déduit de celle qui se trouve à la page 44 de ce Mémoire, en y faisant le temps $t=0$. Nous l'écrivons ici plus simplement, en employant, pour indiquer une série, la caractéristique Σ placée devant son terme général.

Pour la démontrer à la manière de l'auteur, substituons la valeur de z_i dans celle de $y_{n'}$; nous aurons

$$y_n = \Sigma' p_{n'} y_{n'},$$

en faisant, pour abréger,

$$p_{n'} = \frac{2}{m} \Sigma \sin. \frac{i n \pi}{m} \sin. \frac{i n' \pi}{m},$$

et conservant aux caractéristiques Σ et Σ' la signification précédente. La question se réduit à prouver que cette quantité $p_{n'}$ est nulle pour

(*) Premier volume des anciens Mémoires de Turin.

toutes les valeurs du nombre n', comprises depuis l'unité jusqu'à $m-1$ et différentes de n, et qu'elle se réduit à l'unité pour la valeur particulière $n'=n$.

Pour cela, considérons en général la série

$$\sin.\theta\,.\,\sin.\varphi + \sin.2\theta\,.\,\sin.2\varphi + \sin.3\theta\,.\,\sin.3\varphi \ldots$$
$$\ldots\ldots + \sin.(m-1)\theta\,.\,\sin.(m-1)\varphi = u;$$

en la multipliant successivement par $2\cos.\theta$ et $2\cos.\varphi$, et retranchant l'un des résultats de l'autre, on trouve

$$2(\cos.\theta-\cos.\varphi)u = \sin.m\theta.\sin.(m-1)\varphi - \sin.m\varphi.\sin.(m-1)\theta;$$

ce qui fait connaître la valeur de u. Si l'on y fait

$$\theta = \frac{n\pi}{m},\quad \varphi = \frac{n'\pi}{m},$$

on en conclura celle de p_n', savoir :

$$p_n' = \frac{\sin.n\pi.\sin.\frac{(m-1)n'\pi}{m} - \sin.n'\pi.\sin.\frac{(m-1)n\pi}{m}}{m\left(\cos.\frac{n\pi}{m} - \cos.\frac{n'\pi}{m}\right)}.$$

Or, n et n' étant des nombres entiers, on a $\sin.n\pi=0$, $\sin.n'\pi=0$, le numérateur de cette fraction est donc toujours nul; et à cause que n et n' sont moindres que m, son dénominateur ne peut être zéro que dans le seul cas où l'on a $n'=n$; donc tant que n et n' sont inégaux, on a $p_n'=0$. Quand $n'=n$, cette fraction prend la forme $\frac{0}{0}$: différenciant donc ses deux termes par rapport à n'; faisant ensuite $n'=n$, et observant que

$$\sin.n\pi = 0,\quad \sin.\frac{(m-1)n\pi}{m} = -\sin.\frac{n\pi}{m}.\cos.n\pi;$$

on aura, dans ce cas particulier,

$$p_n = -\frac{\cos.\, n\pi \sin.\, \frac{(m-1)n\pi}{m}}{\sin.\, \frac{n\pi}{m}} = \cos.^2 n\pi = 1\,;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

[2.] Représentons par l une longueur donnée ; divisons cette ligne en un nombre m de parties égales, et soit h l'une de ces parties, en sorte que l'on ait $l = mh$; soient de même $x = nh$, $\alpha = n'h$; désignons de plus y_n par fx, et par conséquent, $y_{n'}$ par $f\alpha$: les formules précédentes deviendront

$$fx = \Sigma z_i \sin.\, \frac{i\pi x}{l}, \qquad z_i = \frac{2h}{l} \Sigma' f\alpha \sin.\, \frac{i\pi\alpha}{l}\,;$$

et maintenant la différence constante de la variable α, à laquelle variable se rapporte la caractéristique Σ', sera la quantité quelconque h, au lieu d'être l'unité comme plus haut.

Cette expression de fx doit être regardée comme une formule d'interpolation d'une espèce particulière. On peut la construire au moyen d'une courbe, en prenant la variable x pour abscisse, et fx pour ordonnée : les $m-1$ ordonnées équidistantes qui répondent à $x = h$, $2h$, $3h$, ... $(m-1)h$, sont censées données ; et la courbe tracée d'après l'expression de fx, passe par les sommets de ces $m-1$ ordonnées. Cette ligne n'est point une courbe parabolique, comme dans le problème ordinaire de l'interpolation ; si on la prolonge hors des limites $x = h$, $x = (m-1)h$, on voit qu'elle coupe l'axe des abscisses à l'origine et à l'extrémité de la longueur l; car on a $fx = 0$, quand $x = 0$ et quand $x = l$: on voit aussi que cette courbe, indéfiniment prolongée, se compose de portions semblables dont l'amplitude est l; c'est-à-dire que son ordonnée redevient la même, au signe près, toutes les fois que x augmente de cette amplitude.

[3.] La quantité h étant arbitraire, on peut la prendre aussi petite

que l'on veut; supposons qu'elle devienne infiniment petite, et qu'en même temps le nombre m devienne infini, afin que l reste une quantité finie : la somme Σ' se changera en une intégrale définie ordinaire; et si l'on remplace h par $d\alpha$, on aura

$$z_i = \frac{2}{l}\int \sin.\frac{i\pi\alpha}{l} f\alpha\, d\alpha;$$

l'intégrale étant prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$. En substituant cette valeur de z_i dans celle de fx, on a

$$fx = \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \sin.\frac{i\pi x}{l} \sin.\frac{i\pi\alpha}{l}\right) f\alpha\, d\alpha;$$

et puisque m est devenu infini, la somme Σ devra s'étendre à toutes les valeurs entières de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$. Maintenant, cette formule représente toutes les valeurs de fx, correspondantes à des valeurs de x comprises entre $x=0$ et $x=l$; elle représentera même celles qui répondent à $x=0$ et $x=l$, si toutefois fx est nulle à ces deux limites.

Cette formule se trouve aussi dans le Mémoire cité de *Lagrange;* elle se déduit de celle de la page 56, en y faisant le temps $t=0$. Par la manière dont elle est obtenue, il est clair que fx n'est aucunement assujettie à la loi de continuité; ce qui importait au but que l'auteur s'était proposé. *Lagrange* s'en est servi pour résoudre le problème des cordes vibrantes dans sa plus grande généralité, en concluant le mouvement de la corde sonore, de celui d'un fil chargé d'un nombre indéterminé de points matériels; solution qu'il a reproduite depuis avec de grands développemens dans sa *Mécanique analytique.* Mais à la première époque où il en a fait usage, le passage du fini à l'infini a souffert plusieurs difficultés parmi les géomètres; et l'exactitude de cette formule n'a pas paru suffisamment démontrée.

En général, une série de quantités périodiques prolongée à l'infini, comme celle que renferme la formule précédente, ne peut avoir un

sens clair et précis, qu'autant qu'on la regarde comme la limite d'une série convergente. Nous multiplierons donc le terme général de cette série par l'exponentielle e^{-ki}, e étant la base des logarithmes népériens, et k une quantité positive ; et nous changerons la formule en celle-ci :

$$fx = \frac{2}{l} \int \left(\Sigma\, e^{-ki} \sin. \frac{i\pi x}{l} \sin. \frac{i\pi\alpha}{l} \right) f\alpha\, d\alpha, \qquad (1)$$

dans laquelle on devra faire k infiniment petite ou nulle, après avoir effectué les calculs. L'introduction de cette exponentielle, en rendant la série convergente, fait disparaître les difficultés que la formule de *Lagrange* présentait; et, sous cette forme, on va voir qu'elle devient susceptible d'une démonstration directe et rigoureuse.

[4] Considérons en général la série convergente $\Sigma e^{-ki} \cos. i\theta$, qui s'étend aussi depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. Par la théorie connue des séries récurrentes, on trouve

$$\Sigma\, e^{-ki} \cos. i\theta = \frac{e^k - e^{-k}}{2(e^k - 2\cos.\theta + e^{-k})} - \frac{1}{2}.$$

Mettant, dans cette équation, $\frac{(x-\alpha)\pi}{l}$ à la place de θ; multipliant les deux membres par $f\alpha\, \frac{d\alpha}{l}$, et intégrant, on a

$$\int \left(\Sigma\, e^{-ki} \cos. \frac{i\pi(x-\alpha)}{l} \right) f\alpha\, \frac{d\alpha}{l} + \frac{1}{2l} \int f\alpha\, d\alpha$$
$$= \int \frac{(e^k - e^{-k})\, f\alpha\, d\alpha}{2l\left[e^k - 2\cos.\frac{(x-\alpha)\pi}{l} + e^{-k}\right]}. \qquad (2)$$

Or, je dis que si l'intégrale est prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$, que x soit comprise entre ces deux limites, et que fx ne soit pas infinie, on aura

$$\int \left(\Sigma\, e^{-ki} \cos. \frac{i\pi(x-\alpha)}{l} \right) f\alpha\, \frac{d\alpha}{l} + \frac{1}{2l} \int f\alpha\, d\alpha = fx; \qquad (3)$$

pourvu que l'on fasse $k = 0$, après l'intégration.

En effet, supposons d'abord l'exposant k infiniment petit ; le coefficient de $d\alpha$ sous le signe $\int$, dans le second membre de l'équation (2), le devient aussi pour toutes les valeurs de α, excepté celles qui rendent cos. $\frac{(x-\alpha)\pi}{l}$ infiniment peu différent de l'unité, lesquelles ne peuvent être, d'après les limites de x et de α, que les valeurs de α infiniment peu différentes de x. Si donc on fait $\alpha = x + u$, il suffira de prendre cette intégrale depuis $u = -\beta$ jusqu'à $u = +\beta$, β étant une quantité positive et infiniment petite : entre ces limites, $f\alpha$ pourra être regardée comme invariable et égale à fx; de plus, en négligeant les termes du troisième ordre par rapport à k et à u, on aura

$$e^k - e^{-k} = 2k, \quad e^k - 2\cos.\frac{(x-\alpha)\pi}{l} + e^{-k} = k^2 + \frac{u^2\pi^2}{l^2};$$

au moyen de quoi le second membre de l'équation (2) se réduit à

$$fx\int\frac{lkdu}{k^2l^2+\pi^2u^2} = \frac{fx}{\pi}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{\pi u}{kl}\right) + \text{const.};$$

ou bien, en passant à l'intégrale définie,

$$\frac{2fx}{\pi}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{\pi\beta}{kl}\right);$$

et si maintenant on fait $k = 0$, cette quantité devient

$$\frac{2fx}{\pi}\,\text{arc}\,(\text{tang.} = \infty) = fx;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Il est bon de remarquer que si l'on avait exactement $x = 0$ ou $x = l$, le second membre de l'équation (2) ne serait égal qu'à $\frac{1}{2}fx$, au lieu de fx; car en faisant $\alpha = x + u$, et observant que la variable α doit toujours être positive, il faudra seulement intégrer depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \beta$, dans le cas de $x = 0$, et depuis $u = -\beta$ jusqu'à $u = 0$, dans le cas de $x = l$; ce qui réduit à moitié la valeur de l'intégrale définie. Posant donc $fx = A$ quand $x = 0$, et $fx = A'$ quand

$x=l$, et observant que $\cos.\frac{i\pi(l-\alpha)}{l}=(-1)^i\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}&\int\left(e^{-ki}\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)f\alpha\,\frac{d\alpha}{l}+\frac{1}{2l}\int f\alpha\,d\alpha=\frac{1}{2}A,\\&\int\left(e^{-ki}(-1)^i\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)f\alpha\,\frac{d\alpha}{l}+\frac{1}{2l}\int f\alpha\,d\alpha=\frac{1}{2}A'.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Si, dans l'équation (2), on change x en $-x$, et que cette quantité soit toujours comprise, abstraction faite du signe, entre les limites zéro et l de l'intégration, on aura

$$\int\left(\Sigma\, e^{-ki}\cos.\frac{i\pi(x+\alpha)}{l}\right)f\alpha\,\frac{d\alpha}{l}+\frac{1}{2l}\int f\alpha\,d\alpha=0\,;\qquad(5)$$

car alors le coefficient de $d\alpha$ sous le signe $\int$, dans le second membre de cette équation, sera toujours infiniment petit ou nul, en même temps que l'exposant k; et par conséquent cette intégrale définie sera égale à zéro. Retranchant ce nouveau résultat de l'équation (3), on obtient l'équation (1) du n.° précédent, laquelle aura lieu, comme celles dont elle est déduite, pour toutes les valeurs de x positives et plus petites que l. En ajoutant ensemble les équations (3) et (5), on aura cette autre formule :

$$\frac{2}{l}\int\left(\Sigma\, e^{-ki}\cos.\frac{i\pi x}{l}\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)f\alpha\,d\alpha+\frac{1}{l}\int f\alpha\,d\alpha=fx,\qquad(6)$$

qui aura également lieu pour ces mêmes valeurs de x; et l'on voit aussi, d'après les équations (4), que celle-ci subsistera même pour les valeurs extrêmes $x=0$ et $x=l$.

[5.] Au reste, pour simplifier ces différentes formules, on y peut supprimer l'exponentielle e^{-ki}, et ne la rétablir que quand on a besoin d'effectuer la somme indiquée par Σ, avant l'intégrale relative à α ; ce qui ne peut arriver que quand il s'agit d'en constater l'exactitude, comme nous venons de le faire. Au lieu des équations (1) et (6), nous

écrirons donc simplement

$$\left.\begin{aligned} fx &= \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \sin. \frac{i\pi x}{l} \sin. \frac{i\pi\alpha}{l}\right) f\alpha\, d\alpha, \\ fx &= \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \cos \frac{i\pi x}{l} \cos. \frac{i\pi\alpha}{l}\right) f\alpha\, d\alpha + \frac{1}{l}\int f\alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

On emploiera la première de ces deux expressions de fx, lorsque la fonction sera nulle aux deux limites $x = 0$ et $x = l$, et l'on fera usage de la seconde, quand son coefficient différentiel sera égal à zéro pour ces deux valeurs extrêmes ; car, en différenciant celle-ci par rapport à x, et faisant ensuite $x = 0$ ou $x = l$, il est évident que chacun des termes de la somme Σ s'évanouit, et par conséquent la valeur de $\frac{dfx}{dx}$.

Il existe beaucoup d'autres formules de la même nature que les précédentes, qui ont aussi la propriété d'exprimer les valeurs d'une fonction quelconque entre des limites données, et qui diffèrent les unes des autres par les diverses conditions qu'elles remplissent à ces limites. Chacune de ces formules se démontre par les principes que nous venons d'exposer ; mais, détachées des problèmes qui y conduisent, elles n'offrent pas assez d'intérêt pour trouver place ici. Les recherches de M. *Fourrier* sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, et mon Mémoire sur ce même sujet (*), contiennent plusieurs formules de cette espèce ; nous citerons seulement les deux suivantes, qui sont tirées de ce Mémoire, savoir :

$$\left.\begin{aligned} fx &= \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \sin. \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \sin. \frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l}\right) f\alpha\, d\alpha, \\ fx &= \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \cos. \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \cos. \frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l}\right) f\alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Les sommes sont toujours prises depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$, et les

(*) Bulletin de la Société philomatique, juin 1815.

intégrales depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$. L'une et l'autre de ces deux formules représentent la fonction fx, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$; mais la première suppose qu'on a $fx = 0$ quand $x = 0$, et $\frac{dfx}{dx} = 0$ quand $x = l$; et la seconde, $fx = 0$ lorsque $x = l$, et $\frac{dfx}{dx} = 0$ pour $x = 0$. Pour abréger, nous en omettons la démonstration, qui est facile à suppléer, d'après celle que nous venons de développer dans le n.° précédent.

[6.] Si l'on prend pour $f\alpha$, une fonction telle que l'intégrale relative à α puisse s'effectuer par les moyens connus, il ne restera plus, dans chacune des formules précédentes, que la somme indiquée par Σ, dont la valeur se trouvera par conséquent déterminée par ces équations. Elles peuvent donc servir à la sommation des suites infinies; mais on n'obtient de cette manière que des séries dont les sommes sont déjà connues par d'autres procédés.

Je fais, par exemple,

$$f\alpha = \cos.\frac{c\pi\alpha}{l};$$

c étant une constante quelconque. En intégrant depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$, on a

$$\int f\alpha\, d\alpha = \frac{l \sin. c\pi}{c\pi},$$

$$\int \cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\cos.\frac{c\pi\alpha}{l}d\alpha = \frac{l(c\cos. i\pi \sin. c\pi - i\sin. i\pi\cos. c\pi)}{\pi(c^2 - i^2)};$$

donc, à cause de $\sin. i\pi = 0$, $\cos. i\pi = (-1)^i$, la seconde équation (7) devient

$$\cos.\frac{c\pi x}{l} = \frac{\sin. c\pi}{c\pi} + \frac{2c\sin. c\pi}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^i\cos.\frac{i\pi x}{l}}{c^2 - i^2};$$

et si l'on fait $\frac{\pi x}{l} = \theta$, on en conclut

$$\frac{\pi \cos. c\theta}{2c \sin. c\pi} = \frac{1}{c^2} + \frac{\cos. \theta}{1 - c^2} - \frac{\cos. 2\theta}{4 - c^2} + \frac{\cos. 3\theta}{9 - c^2} - \&c.$$

Soit de même

$$f\alpha = \sin. \frac{c\pi\alpha}{l};$$

nous aurons, en intégrant,

$$\int \sin. \frac{i\pi\alpha}{l} \sin. \frac{c\pi\alpha}{l} d\alpha = \frac{l(i \cos. i\pi \sin. c\pi - c \sin. i\pi \cos. c\pi)}{\pi(c^2 - i^2)};$$

au moyen de quoi, la première équation (7) devient

$$\sin. \frac{c\pi x}{l} = \frac{2 \sin. c\pi}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^i i \sin. \frac{i\pi x}{2}}{c^2 - i^2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\pi \sin. c\theta}{2 \sin. c\pi} = \frac{\sin. \theta}{1 - c^2} - \frac{2 \sin. 2\theta}{4 - c^2} + \frac{3 \sin. 3\theta}{9 - c^2} - \&c.$$

Ces deux résultats sont dus à *Euler*, qui les a trouvés d'une autre manière. La quantité c n'y est assujettie à aucune restriction ; on peut même la supposer imaginaire, et la remplacer par $c\sqrt{-1}$; auquel cas, les sommes de ces séries seront exprimées par des fonctions exponentielles : mais l'angle θ ne doit pas être plus grand que π, puisque la variable x devait être plus petite que l. Dans la première série, on peut faire $\theta = \pi$; mais dans la seconde, cette supposition n'est pas permise ; ce qui tient à ce que la première équation (7), dont la valeur de cette série est déduite, n'a pas lieu pour $x = l$, la valeur de fx n'étant pas nulle à cette limite. Relativement à la sommation des séries de cette forme et de toutes celles qui s'en déduisent, on peut voir les *Exercices de calcul intégral* de M. *Legendre* (5.e partie, §. II.e), et mon troisième Mémoire sur les *Intégrales définies*, imprimé dans ce volume.

[7.] En transportant le zéro des valeurs de x au milieu de l'intervalle dans lequel la fonction de cette variable doit être représentée, les

formules du n.° 5 prendront une forme différente, qu'il est bon de connaître. Pour cela, mettons dans les équations (7), $2l$, $x+l$, $\alpha+l$, à la place de l, x, α; faisons $f(x+l)=Fx$, $f(\alpha+l)=F\alpha$; et partageons chacune des sommes Σ en deux parties, l'une relative aux valeurs paires de i, l'autre qui se rapporte aux nombres impairs : nous trouverons facilement que ces équations deviennent

$$\left.\begin{aligned} Fx &= \int\left(\Sigma \sin.\frac{i\pi x}{l}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l} \\ &\quad+\int\left(\Sigma \cos.\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\cos.\frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l}, \\ Fx &= \int\left(\Sigma \cos.\frac{i\pi x}{l}\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l} \\ &\quad+\int\left(\Sigma \sin.\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin.\frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l}+\frac{1}{2l}\int F\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Les sommes Σ s'étendent toujours depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$; mais les intégrales relatives à α sont prises maintenant depuis $\alpha=-l$ jusqu'à $\alpha=+l$: l'une ou l'autre de ces formules représente toutes les valeurs de Fx, depuis $x=-l$ jusqu'à $x=+l$; la première suppose Fx, et la seconde $\frac{dFx}{dx}$, nulle à ces deux limites.

Lorsque la fonction F sera telle que l'on ait $F\alpha=F(-\alpha)$ pour toutes les valeurs de α, ces deux équations se réduiront évidemment à

$$Fx = 2\int\left(\Sigma \cos.\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\cos.\frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l},$$

$$Fx = 2\int\left(\Sigma \cos.\frac{i\pi x}{l}\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l}+\int F\alpha\frac{d\alpha}{l};$$

et quand on aura $F\alpha=-F(-\alpha)$, aussi pour toutes les valeurs de α, elles deviendront

$$Fx = 2\int\left(\Sigma \sin.\frac{i\pi x}{l}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l},$$

$$Fx = 2\int\left(\Sigma \sin.\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin.\frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l}\right)F\alpha\frac{d\alpha}{l};$$

les intégrales relatives à α, dans ces quatre formules, étant prises seulement depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$.

[8.] Maintenant, si l'on veut que la fonction Fx soit représentée par l'une de ces expressions, pour toutes les valeurs réelles de x, il faudra supposer la quantité l infinie ; mais, avant de faire cette supposition particulière, faisons $\frac{\pi}{l} = h$, $\frac{i\pi}{l} = a$; la seconde équation (9) deviendra

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int(\Sigma \cos. ax \cos. a\alpha)\, h\, F\alpha\, d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int[\Sigma \sin. (a-\tfrac{1}{2}h)x . \sin. (a-\tfrac{1}{2}h)\alpha] h\, F\alpha\, d\alpha + \frac{h}{2\pi}\int F\alpha\, d\alpha;$$

la variable a croîtra par la différence constante h, qu'on peut prendre aussi petite qu'on voudra, et la somme Σ, qui se rapporte à cette variable, s'étendra toujours depuis $a = 0$ jusqu'à a infini. Or, si l'on suppose l infinie, h sera infiniment petite ; on la remplacera donc par da, et l'on changera la somme Σ en une intégrale ordinaire, qui devra être prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{0}$; supprimant en outre $\frac{1}{2}h$ par rapport à a, et le terme $\frac{h}{2\pi}\int F\alpha\, d\alpha$, on aura simplement

$$Fx = \frac{1}{\pi}\iint \cos. a(x-\alpha) . F\alpha\, da\, d\alpha; \qquad (10)$$

l'intégrale relative à α ayant pour limites $-\frac{1}{0}$ et $+\frac{1}{0}$. La première équation (9) conduirait de la même manière à ce même résultat.

Pour vérifier cette formule, il est indispensable d'y rétablir l'exponentielle que nous avons omise, et de l'écrire de cette manière :

$$Fx = \frac{1}{\pi}\iint e^{-ka}\cos. a(x-\alpha) . F\alpha\, da\, d\alpha;$$

k étant une quantité positive qu'on fera égale à zéro après les intégra-

tions. C'est sous cette forme que je l'ai présentée dans le Mémoire sur la *Théorie des ondes*, cité au commencement de celui-ci; voici en peu de mots, la démonstration directe que j'en ai donnée, et qui est fondée sur les mêmes principes que celle de l'équation (3) [n.° 4].

En intégrant depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{0}$, et observant que l'exposant k est positif, on a

$$\int e^{-k\alpha} \cos. a(x-\alpha)\, d\alpha = \frac{k}{k^2+(x-\alpha)^2};$$

la formule à démontrer devient donc

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int \frac{k F\alpha\, d\alpha}{k^2+(x-\alpha)^2}.$$

Supposons d'abord k infiniment petit; le coefficient de $d\alpha$ le sera aussi pour toutes les valeurs de α, excepté celles qui diffèrent infiniment peu de x. Si donc nous faisons $\alpha = x + u$, il suffira d'intégrer depuis $u = -\beta$ jusqu'à $u = +\beta$, β étant une quantité positive et infiniment petite; entre ces limites, on pourra regarder $F\alpha$ comme invariable et égale à Fx; le second membre de notre équation se réduira donc à

$$\frac{1}{\pi} Fx \int \frac{k\, du}{k^2+u^2} = \frac{2}{\pi} \text{ arc } \left(\text{tang.} = \frac{\beta}{k}\right) . Fx;$$

et si maintenant on fait $k = 0$, il sera égal à

$$\frac{2}{\pi} \text{ arc } (\text{tang.} = \infty) . Fx, \text{ ou à } Fx;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

L'équation (10), ainsi que toutes les autres formules précédentes, subsiste pour des fonctions discontinues; ce qui est un grand avantage dans les applications qu'on en peut faire. Il est permis de supposer, par exemple, que Fx n'a de valeurs que depuis $x = c$ jusqu'à $x = c'$, et qu'elle est nulle pour toutes les valeurs de x qui tombent hors de ces limites. Dans ce cas, il suffira de prendre l'intégrale relative à α, depuis $\alpha = c$ jusqu'à $\alpha = c'$: la formule (10) donnera $Fx = 0$, toutes les fois

qu'on prendra pour x, une quantité plus grande que c' ou plus petite que c; elle donnera la véritable valeur de cette fonction, lorsque x sera comprise entre ces limites; mais il est à remarquer qu'on n'en déduira que la moitié de cette valeur, quand on fera $x = c$ ou $x = c'$. En effet, dans le cas de $x = c$, par exemple, l'intégrale relative à α, que nous venons d'évaluer, ne devra être prise que depuis $\alpha = c$ jusqu'à $\alpha = c + \beta$; en sorte qu'elle sera égale à $\frac{\pi}{2} F c$, au lieu de $\pi F c$, lorsqu'on y fera $k = 0$.

Si l'on prend pour $F\alpha$ une fonction telle, que l'intégrale relative à α puisse s'effectuer par les méthodes connues, l'équation (10) ne contiendra plus que l'intégrale relative à a, dont elle pourra alors servir à déterminer la valeur; mais ce procédé, comme celui du n.° 6, ne conduit qu'à des résultats déjà connus.

Nous allons maintenant résoudre plusieurs problèmes, dans lesquels on verra l'usage des formules de l'espèce de celles que nous venons de trouver.

Développemens successifs des Courbes planes.

[9.] Soit une portion de courbe quelconque AMB, comprise entre deux droites parallèles que nous supposerons horizontales pour fixer les idées. Supposons cette courbe tangente en A à la droite inférieure, et perpendiculaire en B à la parallèle supérieure; imaginons qu'on la développe en commençant par son extrémité B; on engendrera une portion de courbe BNA', tangente en B à la droite supérieure, et perpendiculaire en A', à la droite inférieure; développons de même BNA' en commençant par l'extrémité A', ce qui engendrera une portion de courbe $A'M'B'$, tangente en A' à la parallèle inférieure, et perpendiculaire en B' à la droite supérieure; développons encore celle-ci,

en commençant par l'extrémité B'; et ainsi de suite (*) : on demande de déterminer la nature de la développée d'un rang quelconque, d'après celle de la première courbe donnée AMB.

Par le point quelconque M de cette première courbe, menons-lui la tangente TMN qui coupe la seconde courbe au point N, et la parallèle inférieure au point T; par le point N, menons de même une tangente XNM' à la seconde courbe, qui coupe la troisième en M' et la parallèle supérieure en X; par le point M', menons encore la tangente $T'M'N'$ à la troisième courbe, qui coupe la quatrième en N', et la parallèle inférieure en T'; et ainsi de suite. Nous aurons de cette manière une suite de droites qui seront, par la nature des développées, alternativement perpendiculaires et parallèles entre elles, puisque chaque tangente à l'une des courbes sera normale à la courbe suivante.

Considérons d'abord les courbes de rang impair; faisons les arcs de ces courbes $AM = s$, $A'M' = s_1$, $A''M'' = s_2$, &c.; désignons par r, r_1, r_2, &c., leurs rayons de courbure aux points M, M', M'', &c.; et par v l'inclinaison commune de leurs tangentes parallèles TMN, $T'M'N'$, $T''M''N''$, &c., sur l'horizontale inférieure; en sorte qu'on ait $v = \text{ang.}\, NTA'$, $= \text{ang.}\, N'T'A''$, $= \text{ang.}\, N''T''A'''$, &c.

Relativement aux courbes de rang pair, faisons de même leurs arcs $BN = \sigma$, $B'N' = \sigma_1$, $B''N'' = \sigma_2$, &c.; représentons par ρ, ρ_1, ρ_2, &c., leurs rayons de courbure aux points N, N', N'', &c.; et soit enfin u l'inclinaison commune des tangentes XNM', $X'N'M''$, &c., sur l'horizontale supérieure; de manière qu'on ait $u = \text{ang.}\, M'XB'$, $= \text{ang.}\, M''X'B''$, &c. Ces tangentes étant perpendiculaires à celles des courbes de rang impair, on aura $u + v = \frac{\pi}{2}$, π désignant à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre.

D'après ces notations, s_n et r_n appartiendront à la courbe du rang impair, marqué par $2n + 1$; σ_n et ρ_n, à la courbe du rang pair,

(*) Cette indication suffit pour qu'on puisse aisément construire la figure.

marqué par $2n+2$. Par les propriétés connues des rayons de courbure, nous aurons, dans chacune de ces deux courbes,

$$ds_n = r_n dv, \quad d\sigma_n = \rho_n du;$$

et pour lier les courbes de rang pair à celles de rang impair, on aura aussi

$$d\rho_n = -ds_n = -r_n dv,$$
$$dr_{n+1} = -d\sigma_n = -\rho_n du;$$

donc, à cause de $u = \frac{\pi}{2} - v$, qui donne $du = -dv$, il en résultera

$$dr_{n+1} = \rho_n dv; \qquad \text{(a)}$$

d'où l'on tire, en différenciant par rapport à v, et éliminant $d\rho_n$,

$$d^2 r_{n+1} + r_n dv^2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Telle est donc l'équation qui devra nous servir à déterminer r_n en fonction de v et de l'indice n; l'équation précédente fera ensuite connaître la valeur de ρ_n, et le problème sera résolu.

[10.] L'équation (b) est, comme on voit, aux différences mêlées, finies par rapport à n, et infiniment petites par rapport à v; or, toute équation de cette espèce équivaut à un système d'équations différentielles ordinaires, dont elle est le type général, et qui s'en déduiraient en y mettant successivement pour n la suite des nombres naturels. Dans le cas présent, ces équations sont linéaires et à coefficiens constans; leurs intégrales seront donc composées de termes de la forme :

$$r_n = A_n \cos. v a_n + B_n \sin. v a_n;$$

A_n, B_n, a_n étant des quantités indépendantes de v, qui peuvent être réelles ou imaginaires, et dépendre de n d'une manière quelconque. On aura en même temps

$$r_{n+1} = A_{n+1} \cos. v a_{n+1} + B_{n+1} \sin. v a_{n+1};$$

substituant ces valeurs de r_n et r_{n+1} dans l'équation (b), il est d'abord évident que pour qu'elle puisse devenir identique, il faut qu'on ait $a_{n+1}=a_n$; en sorte que a_n est une quantité indépendante de n, que nous représenterons par c. Cela étant, si l'on égale entre eux, après cette substitution, les coefficiens de cos. cv et ceux de sin. cv, on a

$$c^2 A_{n+1} = A_n, \quad c^2 B_{n+1} = B_n;$$

équations aux différences finies dont les intégrales sont

$$A_n = A\frac{1}{c^{2n}}, \quad B_n = B\frac{1}{c^{2n}};$$

A et B étant les constantes arbitraires. Les différens termes de la valeur de r_n seront donc de la forme :

$$\frac{A}{c^{2n}}\sin.\, cv + \frac{B}{c^{2n}}\cos.\, cv;$$

par conséquent nous aurons, pour l'intégrale complète de l'équation (b),

$$r_n = \Sigma\left(\frac{A}{c^{2n}}\sin.\, cv + \frac{B}{c^{2n}}\cos.\, cv\right);$$

la caractéristique Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs possibles de A, B et c, soit réelles, soit imaginaires.

D'après l'équation (a), l'expression correspondante de ρ_n sera

$$\rho_n = \Sigma\left(\frac{A}{c^{2n+1}}\cos.\, cv - \frac{B}{c^{2n+1}}\sin.\, cv\right);$$

et il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de A, B et c, qui sont encore indéterminées.

Or, dans toutes les courbes de rang impair, excepté la première courbe AMB, le rayon de la développée est évidemment nul aux extrémités A', A'', &c., qui répondent à $v=0$: en excluant donc le cas de $n=0$, ou le rayon r, on aura $r_n=0$ pour cette valeur de v; ce qui exige que le terme dépendant de cos. cv disparaisse dans l'ex-

pression de r_n, ou que la quantité B soit égale à zéro; au moyen de quoi, les deux formules précédentes se réduisent à

$$r_n = \Sigma \frac{A}{c^{2n}} \sin. c v, \quad \rho_n = \Sigma \frac{A}{c^{2n+1}} \cos. c v.$$

Dans les courbes de rang pair, sans aucune exception, le rayon de la développée est nul aux extrémités supérieures B, B', B'', &c., qui répondent à $u = 0$ ou $v = \frac{\pi}{2}$; égalant donc à zéro la valeur de ρ_n relative à cette valeur de v, on aura

$$\Sigma \frac{A}{c^{2n+1}} \cos. \frac{c\pi}{2} = 0;$$

et comme cette série doit être nulle pour toutes les valeurs de n, il faut que chacun de ces termes soit séparément égal à zéro : d'où l'on conclut $\cos. \frac{c\pi}{2} = 0$, et par conséquent $c = 2i - 1$, i étant un nombre entier quelconque, qu'il sera permis de supposer positif. La quantité A peut dépendre de i, ce que nous indiquerons en la remplaçant par $A i$; de cette manière, nous aurons

$$r_n = \Sigma \frac{A_i}{(2i-1)^{2n}} \sin. (2i-1) v, \quad \rho_n = \Sigma \frac{A_i}{(2i-1)^{2n+1}} \cos. (2i-1) v;$$

les sommes Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \frac{1}{0}$.

Maintenant supposons que le rayon de courbure de la première courbe de rang pair soit donné en fonction de v, et soit $\rho = f v$; en faisant $n = 0$ dans la valeur générale de ρ_n, on aura

$$f v = \Sigma \frac{A_i}{2i-1} . \cos. (2i - 1) v.$$

Or, si l'on fait $l = \frac{1}{2}\pi$, $x = v$, dans la seconde équation (8) du n.° 5, et si l'on intervertit l'ordre des caractéristiques $\int$ et Σ, elle devient

$$f v = \frac{4}{\pi} \Sigma \left[\int \cos. (2i - 1)\alpha . f\alpha\, d\alpha\right] \cos. (2i - 1) v;$$

donc, pour faire coïncider l'expression précédente de fv avec celle-ci, il faudra prendre

$$A_i = \frac{4}{\pi}(2i-1)\int \cos.(2i-1)\alpha . f\alpha\, d\alpha\,;$$

par conséquent les valeurs de r_n et ρ_n deviendront

$$r_n = \frac{4}{\pi}\,\Sigma\left[\int \cos.(2i-1)\alpha . f\alpha\, d\alpha\right]\frac{\sin.(2i-1)v}{(2i-1)^{2n-1}}\,;$$

$$\rho_n = \frac{4}{\pi}\,\Sigma\left[\int \cos.(2i-1)\alpha . f\alpha\, d\alpha\right]\frac{\cos.(2i-1)v}{(2i-1)^{2n}}\,;$$

les intégrales relatives à α étant prises depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{2}\pi$.

Comme une courbe peut être censée connue, lorsque l'on a trouvé l'expression de son rayon de courbure, il en résulte que ces deux formules renferment la solution complète du problème que nous nous étions proposé de résoudre.

[11]. Le rayon ρ n'est pas immédiatement donné; mais sa valeur peut se déduire de celle du rayon r, qui appartient à la courbe arbitraire AMB, et qui n'est pas contenue dans la valeur générale de r_n. Pour cela, nous avons $d\rho = -r\,dv$; supposant donc qu'on ait $r = Fv$, on en conclura

$$\rho = fv = -\int Fv\, dv\,;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $v = \frac{1}{2}\pi$.

En mettant α à la place de v, on aura $df\alpha = -F\alpha d\alpha$; et il sera aisé d'introduire la fonction $F\alpha$ à la place de $f\alpha$, dans les formules précédentes. En effet, en intégrant par parties, depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, et observant que $f\alpha = 0$ à la seconde limite, on aura

$$\int \cos.(2i-1)\alpha . f\alpha\, d\alpha = \int \frac{\sin.(2i-1)\alpha}{2i-1} . F\alpha\, d\alpha\,;$$

je substitue cette valeur dans nos deux formules; en même temps, je mets dans la seconde $\frac{1}{2}\pi - u$ à la place de v, et $(-1)^{1-i}$ au lieu de

sin. $\frac{1}{2}(2i-1)\pi$; elles deviennent

$$r_n = \frac{4}{\pi}\, \Sigma\left[\int \sin.(2i-1)\alpha \,.\, F\alpha\, d\alpha\right] \frac{\sin.(2i-1)v}{(2i-1)^{2n}},$$

$$\rho_n = \frac{4}{\pi}\, \Sigma\left[\int \sin.(2i-1)\alpha \,.\, F\alpha\, d\alpha\right] \frac{\sin.(2i-1)u}{(-1)^{i-1}(2i-1)^{2n+1}}.$$

[12]. Pour plus de clarté, nous avons distingué jusqu'ici les courbes de rang pair et celles de rang impair; mais à présent nous pouvons comprendre dans une même formule cette valeur de ρ_n et celle de r_n. Désignons en général par m le rang d'une courbe quelconque, compté de la courbe BNA', en sorte que $m = 1$ se rapporte à BNA', $m = 2$ à $A'M'B'$, $m = 3$ à $B'N'A''$, &c.; soit R le rayon de courbure en un point quelconque de cette $m.^{me}$ courbe; appelons θ l'angle correspondant au même point, que nous avions représenté par v dans les courbes impaires, et par u dans les courbes paires : quel que soit le nombre m, nous aurons

$$R = \frac{4}{\pi}\, \Sigma\left[\int \sin.(2i-1)\alpha \,.\, F\alpha\, d\alpha\right] \frac{\sin.(2i-1)\theta}{(-1)^{(i-1)m}(2i-1)^m}.$$

Afin de mieux connaître cette courbe, on peut desirer de la rapporter aux coordonnées ordinaires; soient donc x et y celles du point quelconque que l'on considère; nous fixerons leur origine à l'extrémité de la courbe où le rayon R est nul, et où l'on a $\theta = 0$; les abscisses x se compteront sur la droite horizontale menée par ce point, et les ordonnées y seront perpendiculaires à cette droite : désignant en outre par ds l'élément de la courbe, nous aurons

$$dx = \cos.\theta . ds, \quad dy = \sin.\theta . ds, \quad ds = R d\theta,$$

et par conséquent

$$dx = R \cos.\theta . d\theta, \quad dy = R \sin.\theta . d\theta :$$

substituant donc pour R sa valeur précédente, intégrant ensuite par rapport à θ, et déterminant les constantes de manière qu'on ait $x = 0$

et $y = 0$, quand $\theta = 0$, on trouve

$$x = \frac{1}{\pi} \Sigma \left[\int \sin. (2i-1)\alpha . F\alpha d\alpha\right] \left[\frac{2i-1-(i-1)\cos. 2i\theta - i\cos. 2(i-1)\theta}{i(i-1)(-1)^{(i-1)m}(2i-1)^m}\right],$$

$$y = \frac{1}{\pi} \Sigma \left[\int \sin. (2i-1)\alpha . F\alpha d\alpha\right] \left[\frac{i\sin. 2(i-1)\theta - (i-1)\sin. 2i\theta}{i(i-1)(-1)^{(i-1)m}(2i-1)^m}\right].$$

Dans chacune de ces deux séries, le premier terme, qui répond à $i = 1$, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; en en déterminant la vraie valeur par la règle ordinaire, on le trouve égal à

$$\frac{1}{\pi} (1 - \cos. 2\theta) \int \sin. \alpha . F\alpha d\alpha,$$

dans la première série, et à

$$\frac{1}{\pi} (2\theta - \sin. 2\theta) \int \sin. \alpha . F\alpha d\alpha,$$

dans la seconde. L'intégrale que ces deux quantités renferment n'est autre chose que l'ordonnée de l'extrémité B de la courbe AMB, ou la distance mutuelle des deux parallèles entre lesquelles toutes ces développées sont comprises; distance que nous représenterons par a. En effet, relativement à cette courbe, on a

$$R = F\theta \quad \text{et} \quad dy = \sin. \theta . F\theta d\theta;$$

l'intégrale $\int \sin. \theta . F\theta d\theta$, prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, donnera donc la valeur de cette ordonnée; donc, en mettant α à la place de θ, et conservant les mêmes limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\int \sin. \alpha . F\alpha d\alpha = a.$$

D'après cela, si nous séparons le premier terme du reste de la série, dans les valeurs de R, x et y, et que nous mettions, dans ce reste, $i+1$ à la place de i, nous aurons définitivement

$$R = \frac{4a}{\pi} \sin. \theta + \frac{4}{\pi} \Sigma \left[\int \sin. (2i+1)\alpha . F\alpha d\alpha\right] \frac{\sin. (2i+1)\theta}{(-1)^{im}(2i+1)^m},$$

$$x = \frac{a}{\pi}(1 - \cos. 2\theta)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\Sigma\left[\int \sin.(2i+1)\alpha . F\alpha d\alpha\right]\left[\frac{2i+1 - i\cos.2(i+1)\theta - (i+1)\cos.2i\theta}{i(i+1)(-1)^{im}(2i+1)^m}\right],$$

$$y = \frac{a}{\pi}(2\theta - \sin. 2\theta)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\Sigma\left[\int \sin.(2i+1)\alpha . F\alpha d\alpha\right]\left[\frac{(i+1)\sin. 2i\theta - i\sin. 2(i+1)\theta}{i(i+1)(-1)^{im}(2i+1)^m}\right];$$

et les sommes Σ s'étendront toujours depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$.

Dans toutes les courbes que nous considérons, l'ordonnée de l'extrémité qui répond à $\theta = \frac{1}{2}\pi$ est la même et égale à a; et en effet, pour cette valeur de θ, tous les termes de la somme Σ que l'expression de y renferme, deviennent nuls, et l'on a $y = a$, quel que soit m; ce qui fournit une vérification de notre analyse.

[13.] A mesure que m augmente, les différens termes des séries contenues dans ces trois formules, diminuent indéfiniment; les séries s'approchent de plus en plus d'être égales à zéro; et si l'on suppose m infini, elles s'évanouissent en entier; en sorte qu'à cette limite les formules se réduisent à

$$R = \frac{4a}{\pi}\sin.\theta,\quad x = \frac{a}{\pi}(1 - \cos. 2\theta),\quad y = \frac{a}{\pi}(2\theta - \sin. 2\theta). \qquad \text{(c)}$$

Les courbes qui se déduisent les unes des autres par des développemens successifs, et qui sont toujours contenues entre deux droites parallèles, tendent donc continuellement vers une forme constante, qu'elles ne peuvent atteindre qu'après un nombre infini de développemens, mais dont elles diffèrent d'autant moins que ce nombre est plus grand. Cette courbe limite est celle qui répond aux équations (c), et il est aisé de reconnaître qu'elle est une demi-cycloïde dont la base est perpendiculaire aux deux parallèles, et égale, pour la cycloïde entière, au double de leur distance mutuelle. En effet, si l'on élimine θ entre les valeurs de x et de y, que l'on différencie ensuite, et que l'on fasse $\frac{a}{\pi} = b$, on trouve

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}};$$

équation différentielle d'une cycloïde qui a sa base sur l'axe des y, et le rayon de son cercle générateur égal à b; ce qui suppose sa base égale à $2\pi b$ ou à $2a$.

Ce théorème remarquable est dû à *Jean Bernouilli*, qui l'a donné sans démonstration; on le trouve dans le tome IV de ses *Œuvres :* mais *Euler* est le premier qui l'ait démontré (*). M. *Legendre* en a donné une démonstration plus simple, à la fin de la VI.e partie de ses *Exercices de Calcul intégral.* On trouve aussi dans les manuscrits de *Lagrange*, déposés à la bibliothèque de l'Institut, un Mémoire assez étendu sur ce sujet, que l'auteur paroît avoir lu à l'Académie de Berlin, mais qu'il n'a point fait imprimer. La démonstration qui résulte de l'analyse précédente, est, ce me semble, la plus directe; car il est évident, *à priori*, que la question dépend d'une équation aux différences mêlées, et qu'elle se réduit à examiner ce que devient son intégrale, quand on suppose infini le nombre variable qui marque le rang des développées successives.

[14.] Le rayon de courbure de chaque développée se déduit, par l'intégration, de celui de la développée précédente; en allant, de proche en proche, on pourra donc conclure le rayon d'une courbe d'un rang quelconque, de celui de la première courbe AMB; et si les intégrations successives peuvent toutes s'effectuer par les méthodes connues, la valeur qu'on obtiendra, étant substituée à la place de R dans la formule générale du n.° 12, servira à déterminer la somme Σ' que cette formule renferme. Quoique ce procédé pour la sommation des séries ne conduise qu'à des résultats connus par des moyens plus directs, il ne sera pas inutile d'en faire ici l'application à un exemple. Le plus simple que nous puissions choisir est de supposer que AMB soit un

(*) Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, année 1764.

quart de cercle ; son rayon sera égal à la distance mutuelle des deux parallèles, que nous avons représentée par a; en conservant les notations du n.° 9, nous aurons donc d'abord $r=a$, et ensuite

$$d\rho = -r\,dv, \qquad \rho = a\left(\tfrac{1}{2}\pi - v\right);$$

$$dr_1 = -\rho\,du = \rho\,dv, \qquad r_1 = \frac{a}{2}(\pi v - v^2);$$

$$d\rho_1 = -r_1\,dv, \qquad \rho_1 = \frac{a}{24}(\pi^3 - 6\pi v^2 + 4v^3);$$

$$dr_2 = -\rho_1\,du = \rho_1\,dv, \qquad r_2 = \frac{a}{24}(\pi^3 v - 2\pi v^3 + v^4);$$

$$d\rho_2 = -r_2\,dv, \qquad \rho_2 = \frac{a}{240}(\pi^5 - 5\pi^3 v^2 + 5\pi v^4 - 2v^5);$$

$$dr_3 = -\rho_2\,du = \rho_2\,dv, \qquad r_3 = \frac{a}{720}(3\pi^5 v - 5\pi^3 v^3 + 3\pi v^5 - v^6);$$

&c., &c.;

où l'on a pris les intégrales qui donnent les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, &c.; de manière qu'elles s'évanouissent quand $v=\frac{1}{2}\pi$, et celles qui déterminent r_1, r_2, r_3, &c., de manière qu'elles soient nulles lorsque $v=0$.

Il faudra en même temps faire $F\alpha = a$ dans l'expression de R; intégrant alors depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\int \sin.(2i+1)\alpha\,.\,F\alpha\,d\alpha = \frac{a}{2i+1};$$

et par conséquent,

$$R = \frac{4a}{\pi}\sin.\theta + \frac{4a}{\pi}\,\Sigma\,\frac{\sin.(2i+1)\theta}{(-1)^{im}(2i+1)^{m+1}}. \qquad \text{(d)}$$

Cette formule représentera les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, &c., en y faisant $\theta=\frac{1}{2}\pi - v$, et successivement $m=1$, 3, 5, &c.; elle exprimera celles de r_1, r_2, r_3, &c., en y faisant $\theta=v$, et mettant successivement pour m, les nombres pairs 2, 4, 6, &c. Réciproquement, ces valeurs étant connues, la formule servira à déterminer la somme de

la série qu'elle contient ; ainsi l'on connaîtra, de cette manière, la somme des séries dont les termes généraux sont

$$\frac{\cos.(2i+1)v}{(2i+1)^{2n}}, \quad \frac{\sin.(2i+1)v}{(2i+1)^{2n+1}};$$

n étant un nombre entier quelconque ; mais on ne devra pas oublier que l'équation qui les détermine n'a lieu que pour les valeurs de v comprises depuis $v=0$ jusqu'à $v=\frac{1}{2}\pi$. Toutes ces séries sont déjà connues par différentes méthodes ; et si l'on veut, leurs valeurs peuvent se déduire de celles des séries du n.° 6.

Si le nombre m est assez grand pour qu'on puisse négliger la série contenue dans l'équation (d), ce qui revient à supposer que la développée dont m marque le rang, se confond sensiblement avec la cycloïde ; et en même temps si l'on fait $\theta=0$, c'est-à-dire, $v=\frac{1}{2}\pi$ ou $v=0$, selon que m est pair ou impair : cette équation (d) ne contiendra plus que la quantité π ; en sorte qu'elle pourra servir à calculer le rapport approché de la circonférence au diamètre. C'est à cet usage que *Jean Bernouilli* employait son théorème ; il aurait pu aussi le faire servir à calculer le sinus et le cosinus de l'angle quelconque v, en supposant connue la valeur de π. Mais ces méthodes, dont il est difficile d'apprécier le degré d'approximation, ne peuvent être présentement que des objets de pure curiosité, sur lesquels il serait superflu d'insister davantage.

Mouvement d'une Corde vibrante composée de deux parties de matières différentes.

[15.] La corde que nous considérons est attachée par ses extrémités à deux points fixes ; dans l'état d'équilibre, elle est tendue suivant sa longueur, par une force connue et équivalente à un poids P; on la suppose parfaitement flexible et tant soit peu extensible, ce qui permet de l'écarter de la direction rectiligne, et de lui faire prendre la figure

d'une courbe quelconque ; on l'abandonne ensuite à elle-même, en imprimant, pour plus de généralité, des vîtesses connues à tous ses points. Le problème que l'on se propose de résoudre, consiste à déterminer les lois de ses vibrations de part et d'autre de la droite qui joint ses deux extrémités, et la courbe qu'elle forme à un instant quelconque.

Soit m un point quelconque de la corde, appartenant à l'une ou à l'autre des deux parties qui la composent ; au bout du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement, désignons par y et z ses coordonnées perpendiculaires à la droite qui joint les deux bouts de la corde, et par x' son abscisse, comptée sur cette droite, à partir de l'une de ses deux extrémités ; et pour définir le point m que nous considérons, supposons que dans l'état d'équilibre, sa distance à cette même extrémité était x ; en sorte qu'on avait alors $x' = x$, $y = 0$, $z = 0$. Au bout du même temps t, représentons par T la tension de la corde au point m, laquelle tension peut varier avec le temps, et aussi d'un point à un autre ; c'est-à-dire que T est une fonction inconnue de t et x. Comme cette force est tangente à la courbe, ses composantes parallèles aux axes des coordonnées, seront

$$T\frac{dx'}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds};$$

ds étant l'élément de la courbe ; de sorte qu'on ait

$$ds = dx'\sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{dy}{dx'} = p, \quad \frac{dz}{dx'} = q.$$

Relativement à un point infiniment voisin de m, ces composantes augmenteront de leurs différentielles par rapport à x, et deviendront

$$T\frac{dx'}{ds} + \frac{d\left(T\frac{dx'}{ds}\right)}{dx}dx,$$

$$T\frac{dz}{ds}+\frac{d\left(T\frac{dz}{ds}\right)}{dx}dx;$$

or, si l'on fait abstraction de la pesanteur et de toute autre force accélératrice, l'accroissement de chacune de ces forces exprimera la force motrice suivant chaque axe, de l'élément de la corde qui répond au point m; donc, en désignant par E l'épaisseur de la corde en ce point, ou mieux, le produit de son épaisseur et de sa densité, on aura pour les trois équations du mouvement,

$$\frac{d\left(T\frac{dx'}{ds}\right)}{dx}dx=\frac{d^2x'}{dt^2}Eds,$$
$$\frac{d\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{dx}dx=\frac{d^2y}{dt^2}Eds,$$
$$\frac{d\left(T\frac{dz}{ds}\right)}{dx}dx=\frac{d^2z}{dt^2}Eds.$$

A raison de l'extensibilité de la corde, la quantité E peut varier pendant le mouvement; mais la masse Eds d'un élément quelconque doit demeurer constante et égale à ce qu'elle était dans l'état d'équilibre: appelant donc e l'épaisseur primitive de la corde au point m qui répond à l'abscisse x, nous aurons $Eds=edx$; ce qui change les équations du mouvement en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt^2}&=\frac{d\left(T\frac{dx'}{ds}\right)}{edx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{edx},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{d\left(T\frac{dz}{ds}\right)}{edx}.\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

L'extension de chaque élément de la corde dépend évidemment de la tension qu'il éprouve; ainsi la longueur de l'élément qui répond au point m était dx dans l'état d'équilibre, et il était soumis à une tension P; au bout du temps t, sa longueur est devenue ds, et il éprouve une tension T; le rapport de ds à dx doit donc être une certaine fonction du rapport de T à P; et réciproquement on peut supposer

$$T = Pf\left(\frac{ds}{dx}\right),$$

f désignant une fonction qui sera censée donnée. En substituant cette valeur de T dans les équations (a), elles seront ensuite en nombre suffisant pour déterminer x', y et z en fonctions, de x et de t.

[16]. Afin de pouvoir intégrer ces équations, il est nécessaire de restreindre par quelques hypothèses la généralité de la question. Nous supposerons donc, avec tous les géomètres qui se sont occupés du problème des cordes vibrantes, 1.° que les points de la corde s'écartent très-peu de leurs positions d'équilibre; et faisant $x = x' + u$, nous regarderons u, ainsi que y et z, comme de très-petites quantités, dont nous négligerons les carrés et les produits; 2.° que dans toute la longueur de la corde, la tangente à la courbe qu'elle forme est toujours très-peu inclinée sur l'axe des x; en sorte que p et q sont aussi des quantités très-petites, dont nous négligerons de même les puissances supérieures à la première. De cette manière, nous aurons simplement

$$ds = dx' = dx + du \quad \text{et} \quad T = Pf\left(1 + \frac{du}{dx}\right).$$

Dans l'état d'équilibre, on a $du = 0$ et $T = P$; si donc on développe $f\left(1 + \frac{du}{dx}\right)$ suivant les puissances de $\frac{du}{dx}$, le premier terme sera égal à l'unité; et en négligeant le carré de $\frac{du}{dx}$, on aura

$$T = P\left(1 + \gamma\frac{du}{dx}\right);$$

γ étant un coefficient constant dont la valeur est donnée pour cha-

cune des deux parties de la corde. Ce coefficient est toujours positif, parce qu'une dilatation des élémens de la corde, ou une valeur positive de du, suppose une augmentation de la tension T. Sa valeur se détermine par l'expérience; et pour une corde d'une matière et d'un diamètre quelconques, elle se conclut de l'extension ou de la contraction totale que la corde éprouve, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue la tension d'une quantité connue (*).

Si l'on substitue ces valeurs de ds, dx' et T dans les équations (a), et qu'on néglige les produits des quantités regardées comme très-petites, ces équations deviennent

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{P\gamma}{\epsilon}\frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{P}{\epsilon}\frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{P}{\epsilon}\frac{d^2 z}{dx^2};$$

et maintenant, à cause de la séparation des variables u, y et z, on pourra considérer isolément les oscillations dans le sens de chaque coordonnée. Les équations en y et en z étant exactement les mêmes, on ne s'occupera que de l'une d'elles, de l'équation en y, par exemple. Quant à l'équation en u, elle diffère des deux autres par le facteur γ de son second membre, lequel influe sur la durée des vibrations; de-sorte que, dans une même corde, cette durée n'est pas la même pour les vibrations longitudinales et pour les vibrations transversales: mais quand on aura trouvé la formule qui détermine la durée des oscillations de la seconde espèce, le simple changement de P en $P\gamma$ donnera la formule relative à celles de la première. Il existe entre ces deux espèces d'oscillations une autre différence, que nous allons d'abord expliquer.

[17]. Les vibrations longitudinales d'une corde tendue, attachée par les deux extrémités à des points fixes, sont parfaitement semblables à celles d'une colonne d'air contenue dans un tube bouché par les deux bouts. Pour en bien concevoir la nature, supposons que la corde ait été

(*) Bulletin de la Société philomatique, décembre 1816.

frottée suivant sa longueur dans une partie d'une étendue quelconque, et qu'elle ait ensuite été abandonnée à elle-même. Il se forme alors des *ondes* qui se propagent de part et d'autre de l'ébranlement primitif, et qui sont réfléchies d'une extrémité à l'autre de la corde par les points fixes qui la terminent. La même chose a également lieu, lorsque la corde a été frottée ou ébranlée dans toute sa longueur à-la-fois; et ce sont les réflexions successives dont nous parlons, qui produisent les vibrations longitudinales : la durée de chaque vibration, l'aller et le retour compris, est égale au temps que les ondes emploient à parcourir le double de la longueur de la corde entière. Si les points extrêmes étaient rigoureusement fixes, la réflexion des ondes y serait parfaite; leur amplitude n'y éprouverait aucune diminution, et le mouvement de la corde continuerait indéfiniment, abstraction faite du frottement contre l'air environnant. Mais dans la pratique, les points auxquels la corde est attachée sont toujours tant soit peu mobiles; il en résulte que les ondes n'y éprouvent que des réflexions imparfaites, et qu'elles s'affaiblissent à chaque fois qu'elles sont ainsi réfléchies. Or, dans une corde sonore d'une longueur ordinaire, si l'on fait attention au grand nombre de réflexions qui ont lieu en une fraction de seconde, on concevra que les vibrations longitudinales doivent s'affaiblir très-rapidement, et devenir en général tou-à-fait insensibles dans un intervalle de temps presque inappréciable. C'est en effet ce que l'expérience indique; car on observe qu'aussitôt qu'on a cessé de frotter une corde tendue, le son qu'elle faisait entendre en vertu de ses vibrations longitudinales, s'interrompt presque instantanément.

Il n'en est pas de même à l'égard des vibrations transversales qui sont produites en écartant une corde sonore de la direction rectiligne, et l'abandonnant ensuite à elle-même. La non-fixité absolue de ses points d'attache n'a pas autant d'influence sur l'amplitude de ses oscillations; la résistance de l'air est la cause principale qui les affaiblit graduellement; et malgré cette résistance, elles subsistent souvent pendant plusieurs minutes, et toujours assez long-temps pour qu'on puisse ob-

server le son que la corde fait entendre, sans être obligé d'entretenir son mouvement. Il y a lieu de penser que quand on ébranle au hasard une corde sonore, il se produit, dans le premier moment, des vibrations longitudinales et des vibrations transversales; mais les premières deviennent bientôt insensibles, et l'on n'observe sans doute que le son dû aux vibrations de la seconde espèce.

[18.] Maintenant considérons spécialement l'équation

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{P}{e} \frac{d^2 y}{d x^2},$$

de laquelle dépendent les vibrations transversales dans le sens des y. Si la corde était homogène et par-tout d'une égale épaisseur, la quantité e n'aurait qu'une seule valeur; mais comme elle est composée de deux parties différentes, cette quantité a aussi deux valeurs distinctes, ce qui exige que l'on considère séparément l'équation précédente pour chacune de ces deux valeurs. Désignons donc par l et l' les longueurs des deux portions de la corde, par k et k' leurs poids, et par g la gravité; les deux valeurs de e seront $e = \frac{k}{g\,l}$ et $e = \frac{k'}{g\,l'}$. Supposons de plus que l'une de ces deux parties s'étende depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et l'autre depuis $x = l$ jusqu'à $x = l + l'$, en sorte que leur point de jonction réponde à $x = l$; conservons y pour représenter l'ordonnée appartenant à la première partie, et prenons y' pour représenter celle qui répond à la seconde; faisons enfin

$$\frac{P\,g\,l}{k} = a^2, \quad \frac{P\,g\,l'}{k'} = a'^2;$$

nous aurons les équations

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = a^2 \frac{d^2 y}{d x^2}, \quad \frac{d^2 y'}{d t^2} = a'^2 \frac{d^2 y'}{d x^2},$$

dont la première aura lieu depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et la seconde depuis $x = l$ jusqu'à $x = l + l'$.

Leurs intégrales complètes sont

$$y = \Psi(x - at) + \psi(x + at),$$

$$y' = \Phi(x - a't) + \varphi(x + a't);$$

Ψ, ψ, Φ et φ étant des fonctions arbitraires. La question consiste donc à déterminer ces quatre fonctions d'après la figure initiale de la corde, les vîtesses primitives de ces différens points, et les conditions qui ont lieu à ses extrémités et au point de jonction de ses deux parties.

Or, les points extrêmes étant regardés comme fixes, ou faisant du moins de très-petites excursions relativement à celles des autres points, il est permis de supposer leurs coordonnées nulles pendant toute la durée du mouvement : quel que soit t, nous aurons donc $y = 0$ pour $x = 0$, et $y' = 0$ pour $x = l + l'$; d'où il résulte

$$\Psi(-at) + \psi(at) = 0,$$

$$\Phi(l + l' - a't) + \varphi(l + l' + a't).$$

Puisque nous comptons le temps t de l'origine du mouvement, il s'ensuit que cette variable est toujours positive; ainsi ces équations ont lieu pour toutes les valeurs positives de at et de $a't$; mais elles peuvent ne pas subsister pour des valeurs négatives de ces quantités. Les valeurs de x étant toutes positives et ne surpassant point $l + l'$, on pourra mettre dans la première équation $at + x$ à la place de at, et dans la seconde $a't + l + l' - x$ au lieu de $a't$: de cette manière, on aura

$$\psi(x + at) = -\Psi(-x - at),$$

$$\Phi(x - a't) = -\varphi(2l + 2l' - x + a't);$$

ce qui change les expressions de y et y' en celles-ci :

$$y = \Psi(x - at) - \Psi(-x - nt),$$

$$y' = \varphi(x + a't) - \varphi(2l + 2l' - x + a't),$$

qui ne contiennent plus que deux fonctions arbitraires.

Il est évident que les quantités y et y' doivent être constamment égales pour la valeur de $x = l$, qui répond au point de jonction des deux parties de la corde; mais je dis, de plus, qu'il faut qu'on ait en ce même point $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$, c'est-à-dire, que les courbes formées par ces deux parties doivent toujours avoir une tangente commune à leur point de jonction. Comme cette seconde condition tient à l'importante question de la discontinuité des fonctions arbitraires, nous allons entrer dans quelques détails pour en établir la nécessité d'une manière incontestable.

[19.] Appelons μ le point de jonction des deux parties de la corde; soit $m\mu m'$ une portion quelconque de cette corde, qui comprend le point μ, et qui se termine à des points que nous appelons m et m'; désignons par h la masse de $m\mu m'$, par v_1 et u_1 les vîtesses de son centre de gravité suivant les axes des y et des x, par p et p' les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy'}{dx}$ qui répondent aux points m et m', et enfin par T et T' les tensions qui ont lieu en ces mêmes points : en observant que, dans toute la longueur de la corde, la tangente est supposée très-peu inclinée sur l'axe des abscisses, et négligeant, comme plus haut, le carré de cette inclinaison, on aura, par rapport au centre de gravité de $m\mu m'$, les deux équations

$$h\frac{dv_1}{dt} = T'p' - Tp, \quad h\frac{du_1}{dt} = T' - T.$$

Or, si l'on suppose que m et m' se rapprochent de plus en plus du point μ, et par conséquent que h diminue indéfiniment, il faudra que les seconds membres de ces équations diminuent de même; de telle sorte que si la quantité h devient infiniment petite, chacune des différences $T' - T$ et $p' - p$ le deviendra aussi; sans quoi les degrés de vîtesse du_1 et dv_1, imprimés à tous les instans au centre de gravité de $m\mu m'$, cesseraient d'être infiniment petits, et sa vîtesse, au bout d'un temps fini, serait infinie; ou, autrement dit, on pourrait toujours prendre

la quantité h assez petite, pour que la vîtesse de ce point, au bout d'un intervalle de temps quelconque, fût plus grande que toute vîtesse donnée; ce qui serait contraire à la loi de continuité du mouvement et aux premiers principes de la dynamique. Ce raisonnement s'applique évidemment à toute autre portion $m\mu m'$ de la corde vibrante, et ne suppose pas que μ soit le point de jonction des deux parties différentes qui la composent. Il en faut donc conclure, en général, que, soit à l'origine du mouvement, soit pendant toute sa durée, le premier coefficient différentiel de l'ordonnée, aussi-bien que l'ordonnée elle-même, ne doit éprouver aucun changement brusque dans toute la longueur de la corde, et qu'au point de jonction de ses deux parties on doit avoir constamment $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$. La tension T devant être assujettie à la même loi de continuité, il résulte de sa valeur précédente [n.° 16], que ces conclusions conviennent également au premier coefficient différentiel de la variable u, qui répond aux excursions longitudinales des points de la corde.

On voit par-là que, dans le problème des cordes vibrantes, on peut admettre que la figure initiale de la corde soit composée de plusieurs lignes droites ou portions de courbes différentes, pourvu toutefois que ces portions de courbes aient la même tangente à leurs points de jonction; car sans cette restriction, le mouvement de la corde ne saurait être déterminé par l'analyse différentielle. Ainsi, par exemple, les cas où la figure initiale est une ligne brisée, ou une portion de polygone quelconque, ne sont pas résolubles par l'analyse; et ce ne peut être que par analogie qu'on les comprend dans la solution générale du problème.

Ces conclusions s'accordent avec l'opinion émise par M. *Laplace* sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles (*); et quoique *Lagrange* ait adopté et confirmé par son analyse l'opinion d'*Euler* sur la discontinuité de ces

(*) Théorie analytique des probabilités, 2.e édition, pag. 77 et suiv.

fonctions, on peut voir dans son second Mémoire sur la *Théorie du son*, qu'il était loin d'admettre leur discontinuité absolue, et que, relativement au problème des cordes vibrantes, il excluait, comme nous, le cas où deux portions de la corde font un angle fini (*).

Généralement, lorsqu'une question de géométrie ou de mécanique conduit à une équation aux différences partielles, il est nécessaire que toutes les quantités telles que les vîtesses des mobiles, les ordonnées des courbes, les inclinaisons de leurs tangentes, les rayons de courbure, &c., dont les différentielles entrent dans l'équation du problème, soient assujetties à la loi de continuité; car cette équation suppose essentiellement que la variation de chacune de ces quantités devient infiniment petite en même temps que l'accroissement de la variable dont elle dépend. Lors donc qu'il s'agira d'une équation de l'ordre quelconque n, renfermant $\frac{d^n y}{d x^n}$ ou $\frac{d.\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}}{d x}$, il faudra que les valeurs de y, $\frac{d y}{d x}$, $\frac{d^2 y}{d x^2}$, jusqu'à $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$ inclusivement, soient astreintes à la loi de continuité; mais la quantité $\frac{d^n y}{d x^n}$ et tous les coefficiens différentiels des ordres supérieurs, n'y sont pas nécessairement assujettis; et c'est en cela que consiste la seule discontinuité que le calcul peut tolérer.

[20.] Il est bon d'éclaircir ce principe général par un exemple; et pour cela, je choisis l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{d y}{d t} + a \frac{d y}{d x} = b y,$$

dans laquelle a et b sont des coefficiens constans. Son intégrale complète est

$$y = e^{b t} \phi (x - a t);$$

ϕ désignant la fonction arbitraire, e la base des logarithmes népériens.

(*) Second volume des anciens Mémoires de Turin, pag. 336.

En faisant $t=0$, on a $y=\phi x$; ainsi l'on peut prendre arbitrairement la courbe qui répond à cette valeur de t; l'expression de son ordonnée servira à déterminer la fonction ϕ; et comme l'équation intégrée n'est que du premier ordre, il suffira que les valeurs de cette ordonnée n'éprouvent aucun changement brusque : celles de $\frac{dy}{dx}$ ne seront pas assujetties à la loi de continuité. La courbe dont l'équation est $y=\phi x$ pourra donc être composée de plusieurs portions de courbes différentes; il ne sera pas même nécessaire que ces portions de courbes aient une tangente commune à leurs points de jonction.

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$\phi x = 1 + \alpha \sin. x,$$

pour toutes les valeurs positives de x, et

$$\phi x = 1 + \beta x,$$

pour toutes ses valeurs négatives; α et β étant des constantes données. Cette détermination de la fonction ϕ, que je prends à-peu-près au hasard, est admissible, parce qu'au point qui répond à $x=0$, où cette fonction change de nature, les deux expressions de ϕx donnent la même valeur, savoir, $\phi x=1$; de manière que la variable x passe du positif au négatif, sans que les valeurs de la fonction ϕ éprouvent aucun changement brusque. Mais il n'en est pas de même de son coefficient différentiel; car pour une valeur de x infiniment petite et positive, on a $\frac{d\phi x}{dx}=\alpha$, et pour toutes les valeurs de x négatives, on a $\frac{d\phi x}{dx}=\beta$; ce qui ne pourrait coïncider qu'autant qu'on supposerait $\alpha=\beta$.

La valeur générale de y sera, dans notre hypothèse,

$$y = e^{bt} + \alpha e^{bt} \sin. (x - at),$$

tant qu'on aura $x - at > 0$, et

$$y = e^{bt} + \beta e^{bt}(x - at),$$

lorsqu'on aura $x - at < o$, quel que soit d'ailleurs le signe de la variable x. Pour $x = at$, on aura $y = e^{bt}$; mais on peut se demander quelles valeurs on devra prendre pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy}{dt}$, relativement à cette valeur particulière de x.

Pour répondre à cette question, il faut observer que la notation $\frac{dy}{dx}$ représente la limite du rapport $\frac{y' - y_,}{h}$, dans lequel y' et $y_,$ expriment les valeurs de y qui répondent à $x + \frac{1}{2}h$ et $x - \frac{1}{2}h$; h étant une quantité arbitraire que l'on fera décroître indéfiniment. Or, dans le cas actuel, on aura y' en mettant $at + \frac{1}{2}h$ à la place de x dans la première expression de y, et $y_,$ en faisant $x = at - \frac{1}{2}h$ dans la seconde; d'où l'on conclut

$$\frac{y' - y_,}{h} = \left(\frac{\alpha \sin.\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\beta h}{h}\right) e^{bt};$$

et en passant à la limite, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) e^{bt};$$

où l'on peut remarquer que cette valeur est la demi-somme de celles que l'on déduirait des deux expressions de y, considérées séparément.

On obtiendra de même la valeur de $\frac{dy}{dt}$ qui répond à $x = at$, en faisant $t = \frac{x}{a} + \frac{1}{2}h$ dans l'expression de y qui suppose $x - at < o$, ce qui donnera y'; et en mettant, pour avoir $y_,$, $\frac{x}{a} - \frac{1}{2}h$ à la place de t dant celle qui suppose $x - at > o$: de cette manière, on a

$$\frac{y'-y_,}{h} = \left(\frac{e^{\frac{1}{2}bh} - e^{-\frac{1}{2}bh}}{h}\right) e^{\frac{bx}{a}} - \left(\frac{\frac{1}{2}\beta ahe^{\frac{1}{2}bh} + \alpha \sin.\frac{1}{2}ahe^{-\frac{1}{2}bh}}{h}\right) e^{\frac{bx}{a}};$$

d'où l'on déduit, en observant que $x = at$, et passant à la limite,

$$\frac{dy}{dt} = b e^{bt} - \frac{a}{2}(\alpha + \beta) e^{bt};$$

ce qui est aussi la demi-somme des valeurs de $\frac{dy}{dt}$, qui résultent des deux expressions différentes de y.

A la simple inspection de ces valeurs particulières de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy}{dt}$, jointes à $y = e^{bt}$, on vérifie qu'elles satisfont à l'équation aux différences partielles que nous avons prise pour exemple.

[21.] Après cette digression, revenons au problème dont nous cherchons la solution.

Nous aurons donc, au point de jonction des deux parties de la corde, les deux équations $y = y'$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$. Or, d'après les valeurs de y et y' du n.° 18, on a identiquement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\Psi(x - at)}{a\,dt} - \frac{d\Psi(-x - at)}{a\,dt};$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d\varphi(x + a't)}{a'\,dt} + \frac{d\varphi(2l + 2l' - x + a't)}{a'\,dt};$$

je fais $x = l$, j'égale entre elles ces deux quantités, et j'intègre ensuite par rapport à t; il vient

$$\frac{1}{a'}\varphi(l + a't) + \frac{1}{a'}\varphi(l + 2l' + a't) = -\frac{1}{a}\Psi(l - at) - \frac{1}{a}\Psi(-l - at):$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce qu'elle peut être censée contenue dans la fonction Ψ. La condition $y = y'$ quand $x = l$, donne immédiatement

$$\varphi(l + a't) - \varphi(l + 2l' + a't) = \Psi(l - at) - \Psi(-l - at).$$

On tire de ces deux équations

$$2a'\Psi(l - at) = (a' - a)\varphi(l + a't) - (a' + a)\varphi(l + 2l' + a't),$$

$$2a'\Psi(-l - at) = -(a' + a)\varphi(l + a't) + (a' - a)\varphi(l + 2l' + a't);$$

elles doivent avoir lieu pendant toute la durée du mouvement, ou pour toutes les valeurs positives de t; on peut donc mettre dans la première $t+\frac{2l}{a}$ à la place de t; et si on la retranche ensuite de la seconde, la fonction Ψ disparaît, et l'on a

$$\left.\begin{array}{l}(a'+a)\varphi(l+2l'+\frac{2a'l}{a}+a't)-(a'-a)\varphi(l+\frac{2a'l}{a}+a't)\\ \quad +(a'-a)\varphi(l+2l'+a't)-(a'+a)\varphi(l+a't)=0.\end{array}\right\} \quad (b)$$

Nous pouvons aussi mettre dans la première de ces deux équations successivement $t+\frac{l+x}{a}$, $t+\frac{l-x}{a}$ à la place de t, pourvu que l'on ait $x<l$, ce qui a lieu dans toute la partie de la corde à laquelle répond l'ordonnée y. Nous aurons alors

$$2a'\Psi(-x-at)=(a'-a)\varphi(l+\frac{a'l}{a}+\frac{a'x}{a}+a't)$$
$$-(a'+a)\varphi(l+2l'+\frac{a'l}{a}+\frac{a'x}{a}+a't),$$

$$2a'\Psi(x-at)=(a'-a)\varphi(l+\frac{a'l}{a}-\frac{a'x}{a}+a't)$$
$$-(a'+a)\varphi(l+2l'+\frac{a'l}{a}-\frac{a'x}{a}+a't);$$

retranchant le premier de ces deux résultats du second, et divisant par $2a'$, nous aurons une expression de l'ordonnée y [n.° 18], qui ne contiendra plus, comme celle de y', que la seule fonction φ : ces valeurs de y et de y' réunies seront

$$y=\frac{a'+a}{2a'}.\varphi(l+2l'+\frac{a'l}{a}+\frac{a'x}{a}+a't)-\frac{a'-a}{2a'}.\varphi(l+\frac{a'l}{a}+\frac{a'x}{a}+a't)$$
$$+\frac{a'-a}{2a'}.\varphi(l+\frac{a'l}{a}-\frac{a'x}{a}+a't)-\frac{a'+a}{2a'}.\varphi(l+2l'+\frac{a'l}{a}-\frac{a'x}{a}+a't),$$

$$y'=\varphi(x+a't)-\varphi(2l+2l'-x+a't).$$

Nous avons satisfait maintenant aux conditions relatives à la jonction des deux parties de la corde, et à celles qui expriment la fixité de ses points extrêmes; la question est réduite à trouver l'expression de la fonction φ, au moyen de l'équation (b), et des données initiales du mouvement, lesquelles devront servir à déterminer les quantités arbitraires qui entreront dans l'intégrale de cette équation.

[22.] L'équation (b) est une équation aux différences finies, linéaire et à coefficiens constans; son intégrale, ou la valeur de la fonction φ qu'on en déduira, sera donc composée de termes de cette forme:

$$\varphi\,(l + a' t) = C \cos.\,(\lambda t + \gamma);$$

C, λ et γ étant des quantités indépendantes de t, qui peuvent être réelles ou imaginaires. On tire de là

$$\varphi\left(l + a' t + 2 l' + \frac{2 a' l}{a}\right) - \varphi\,(l + a' t) =$$
$$- 2 C \sin.\,\lambda\left(\frac{l'}{a'} + \frac{l}{a}\right).\sin.\left[\lambda\left(t + \frac{l'}{a'} + \frac{l}{a}\right) + \gamma\right],$$
$$\varphi\,(l + a' t + 2 l') - \varphi\left(l + a' t + \frac{2 a' l}{a}\right) =$$
$$- 2 C \sin.\,\lambda\left(\frac{l'}{a'} - \frac{l}{a}\right).\sin.\left[\lambda\left(t + \frac{l'}{a'} + \frac{l}{a}\right) + \gamma\right];$$

substituant ces valeurs dans l'équation (b), et supprimant les facteurs communs à tous les termes, il vient

$$(a' + a) \sin.\lambda\left(\frac{l'}{a'} + \frac{l}{a}\right) + (a' - a) \sin.\lambda\left(\frac{l'}{a'} - \frac{l}{a}\right) = 0;$$

ou, ce qui est la même chose,

$$a' \sin.\,\frac{\lambda l'}{a'} \cos.\,\frac{\lambda l}{a} + a \cos.\,\frac{\lambda l'}{a'} \sin.\,\frac{\lambda l}{a} = 0: \qquad \text{(c)}$$

la quantité λ devra donc satisfaire à cette équation; et quant aux deux autres constantes C et γ, elles demeureront tout-à-fait arbitraires. On

prendra successivement pour λ, toutes les racines de cette équation transcendante, lesquelles sont en nombre infini; et l'on aura pour l'intégrale complète de l'équation (b),

$$\varphi\,(l + a' t) = \Sigma\, C \cos.\, (\lambda t + \gamma);$$

la caractéristique Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs de λ, et C et γ étant des fonctions arbitraires de λ, c'est-à-dire, des quantités différentes pour les différens termes de la série.

Au moyen de cette expression de $\varphi\,(l + a' t)$, on trouve, après quelques réductions, que les valeurs de y et y' du n.° précédent deviennent

$$y = \frac{2}{a'}\Sigma\left[\left(a' \sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a} - a\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l}{a}\right)\sin.\left(\lambda t + \frac{\lambda l'}{a'} + \gamma\right)\right.$$
$$\left. - \left(a' \sin.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l}{a} + a\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}\right)\cos.\left(\lambda t + \frac{\lambda l'}{a'} + \gamma\right)\right] C \sin.\frac{\lambda x}{a},$$

$$y' = 2\,\Sigma\, C \sin.\frac{\lambda(l + l' - x)}{a'}\sin.\left(\lambda t + \frac{\lambda l'}{a'} + \gamma\right).$$

En vertu de l'équation (c), la première se réduit à

$$y = 2\,\Sigma\,\frac{C \sin.\frac{\lambda l'}{a'}}{\sin.\frac{\lambda l}{a}}\sin.\frac{\lambda x}{a}\sin.\left(\lambda t + \frac{\lambda l'}{a'} + \gamma\right):$$

et si nous faisons

$$2C\cos.\left(\frac{\lambda l'}{a'} + \gamma\right) = A \sin.\frac{\lambda l}{a},\quad 2C\sin.\left(\frac{\lambda l'}{a'} + \gamma\right) = B \sin.\frac{\lambda l}{a},$$

de manière que C et γ se trouvent remplacées par deux autres quantités arbitraires A et B; que nous fassions aussi, dans la valeur de y', $l + l' - x = x'$, nous aurons définitivement

$$\left.\begin{aligned} y &= \Sigma A \sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda x}{a}\sin.\lambda t + \Sigma B \sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda x}{a}\cos.\lambda t,\\ y' &= \Sigma A \sin.\frac{\lambda l}{a}\sin.\frac{\lambda x'}{a'}\sin.\lambda t + \Sigma B \sin.\frac{\lambda l}{a}\sin.\frac{\lambda x'}{a'}\cos.\lambda t.\end{aligned}\right\}\ \text{(d)}$$

A la simple inspection de ces valeurs, on voit qu'elles satisfont aux conditions $y=0$ quand $x=0$, $y'=0$ quand $x=l+l'$ ou $x'=0$, et $y=y'$ quand $x=l$ et $x'=l'$. Relativement à l'autre condition

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx}=-\frac{dy'}{dx'},$$

qui doit aussi avoir lieu pour ces dernières valeurs de x et x', on vérifie également qu'elle est remplie, en ayant égard à l'équation (c).

Si l'on représente par v la vîtesse du point dont l'ordonnée est y, et par v' celle du point dont y' est l'ordonnée, en sorte qu'on ait

$$\frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dy'}{dt}=v',$$

on aura, à un instant quelconque,

$$\left.\begin{aligned} v&=\Sigma A\lambda \sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda x}{a}\cos.\lambda t-\Sigma B\lambda\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda x}{a}\sin.\lambda t,\\ v'&=\Sigma A\lambda\sin.\frac{\lambda l}{a}\sin.\frac{\lambda x'}{a'}\cos.\lambda t-\Sigma B\lambda\sin.\frac{\lambda l}{a}\sin.\frac{\lambda x'}{a'}\sin.\lambda t.\end{aligned}\right\}(e)$$

Ces expressions, jointes à celles de y et y', nous feront connaître l'état des deux parties de la corde au bout d'un temps donné, lorsque nous aurons déterminé, d'après leur état initial, les valeurs des coefficiens A et B qui répondent à chaque valeur de λ.

[23.] Il convient d'abord d'observer que, par la nature du problème qui nous occupe, aucune des racines de l'équation (c) ne peut être imaginaire. Cela résulte de ce qu'une corde tendue, attachée par les extrémités à deux points fixes, est évidemment dans un état d'équilibre stable; de sorte que si l'on vient à l'en écarter tant soit peu, chacun de ses points ne peut faire que de petites oscillations de part et d'autre de sa position initiale; or, il arriverait le contraire, si l'une ou plusieurs des valeurs de λ étaient imaginaires; car alors $\sin.\lambda t$ et $\cos.\lambda t$ se changeraient en des exponentielles réelles, et les termes correspondans de y et y' croîtraient indéfiniment avec le temps t. L'une de ces racines est

zéro; les autres sont deux à deux égales et de signes contraires; ce qui permet de n'avoir égard, dans les expressions de y et y', qu'aux racines positives : nous supposerons donc, pour plus de simplicité, que la caractéristique Σ s'étend seulement à toutes les valeurs positives de λ. Cela posé, soit, à l'origine du mouvement,

$$y = fx, \quad y' = f'x, \quad v = Fx, \quad v = F'x';$$

de manière que fx et Fx représentent des fonctions données depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et $f'x'$ et $F'x'$ depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = l'$. Dans ces intervalles, ces fonctions peuvent être discontinues, pourvu qu'elles n'éprouvent aucun changement brusque, non plus que les coefficiens différentiels des deux premières, savoir, $\frac{dfx}{dx}$ et $\frac{df'x'}{dx'}$ [n.° 19]; il faut de plus qu'elles soient nulles aux extrémités de la corde, ou qu'on ait $fx = 0$, $Fx = 0$ pour $x = 0$, et $f'x' = 0$, $F'x' = 0$ pour $x' = 0$; enfin on doit aussi avoir $fx = f'x'$, $\frac{dfx}{dx} = -\frac{df'x'}{dx'}$, $Fx = F'x'$, au point de jonction des deux parties de la corde, ou lorsqu'on fait $x = l$ et $x' = l'$.

Comme on est convenu de compter le temps t de l'origine du mouvement, il en résulte que si l'on fait $t = 0$ dans les expressions de y, y', v et v' du n.° précédent, elles devront coïncider avec les valeurs initiales de ces quatre quantités : nous aurons donc

$$\left.\begin{array}{ll} fx = \Sigma B \sin. \frac{\lambda l'}{a'} \sin. \frac{\lambda x}{a}, & f'x' = \Sigma B \sin. \frac{\lambda l}{a} \sin. \frac{\lambda x'}{a'}; \\ Fx = \Sigma A\lambda \sin. \frac{\lambda l'}{a'} \sin. \frac{\lambda x}{a}, & F'x' = \Sigma A\lambda \sin. \frac{\lambda l}{a} \sin. \frac{\lambda x'}{a'}. \end{array}\right\} \text{(f)}$$

Les deux premières équations serviront à déterminer tous les coefficiens B, relatifs aux différentes valeurs de λ, et les deux autres feront connaître, de la même manière, les coefficiens désignés par A; ou autrement dit, nous allons déduire de ces deux couples d'équations, les expressions de A et de B en fonctions de λ.

Pour cela, je désigne par λ' une racine positive quelconque de l'équation (c); je mets dans la première de nos quatre équations la lettre α à la place de x, et je la multiplie par $\sin.\frac{\lambda'\alpha}{a}$; d'où il résulte

$$\sin.\frac{\lambda'\alpha}{a}f\alpha = \frac{1}{2}\Sigma B\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{(\lambda-\lambda')\alpha}{a}$$
$$-\frac{1}{2}\Sigma B\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{(\lambda+\lambda')\alpha}{a}.$$

Je multiplie celle-ci par $d\alpha$; j'intègre ensuite ses deux membres depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$: il vient

$$\int\sin.\frac{\lambda'\alpha}{a}f\alpha\, d\alpha = \frac{a}{2}\Sigma B\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{(\lambda-\lambda')l}{a}}{\lambda-\lambda'}$$
$$-\frac{a}{2}\Sigma B\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{(\lambda+\lambda')l}{a}}{\lambda+\lambda'}.$$

On déduit de même de la seconde équation (f),

$$\int\sin.\frac{\lambda'\alpha'}{a'}f'\alpha'\, d\alpha' = \frac{a'}{2}\Sigma B\frac{\sin.\frac{\lambda l}{a}\sin.\frac{(\lambda-\lambda')l'}{a'}}{\lambda-\lambda'}$$
$$-\frac{a'}{2}\Sigma B\frac{\sin.\frac{\lambda l}{a}\sin.\frac{(\lambda+\lambda')l'}{a'}}{\lambda+\lambda'};$$

l'intégrale étant prise depuis $\alpha' = 0$ jusqu'à $\alpha' = l'$. De ces deux équations, on conclut celle-ci :

$$\frac{a'}{a}\sin.\frac{\lambda' l'}{a'}\int\sin.\frac{\lambda'\alpha}{a}f\alpha\, d\alpha + \frac{a}{a'}\sin.\frac{\lambda' l}{a}\int\sin.\frac{\lambda'\alpha'}{a'}f'\alpha'\, d\alpha'$$
$$= \frac{1}{2}\Sigma B\left[\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}\left(a'\sin.\frac{\lambda' l'}{a'}\cos.\frac{\lambda' l}{a}+a\cos.\frac{\lambda' l'}{a'}\sin.\frac{\lambda' l}{a}\right)}{\lambda-\lambda'}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin.\frac{\lambda' l'}{a'}\sin.\frac{\lambda' l}{a}\left(a'\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l}{a}+a\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}\right)}{\lambda-\lambda'}\right].$$

$$-\frac{1}{2}\Sigma B\left[\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}\left(a'\sin.\frac{\lambda' l'}{a'}\cos.\frac{\lambda' l}{a}+a\cos\frac{\lambda' l'}{a'}\sin.\frac{\lambda' l'}{a}\right)}{\lambda+\lambda'}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin.\frac{\lambda' l'}{a'}\sin.\frac{\lambda' l}{a}\left(a'\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l}{a}+a\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}\right)}{\lambda+\lambda'}\right].$$

Or, à cause que λ et λ' sont des racines de l'équation (c), le numérateur de chacune des fractions contenues sous le signe Σ dans le second membre de cette équation, est égal à zéro; d'ailleurs ces deux racines étant l'une et l'autre positives, le dénominateur $\lambda+\lambda'$ ne peut être nul, et l'autre dénominateur $\lambda-\lambda'$ ne le devient que quand on a $\lambda'=\lambda$; les séries qui forment ce second membre, se réduisent donc à un seul terme, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$: en déterminant sa vraie valeur par la règle ordinaire, on la trouve égale à

$$\frac{1}{2}B\left[\left(\frac{a'l}{a}+\frac{al'}{a'}\right)\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}-(l+l')\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\right]\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a};$$

d'où l'on conclut pour le coefficient B correspondant à une racine quelconque λ, cette valeur générale :

$$B=\frac{2a'^2\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\int\sin.\frac{\lambda\alpha}{a}f\alpha\,d\alpha+2a^2\sin.\frac{\lambda l}{a}\int\sin.\frac{\lambda\alpha'}{a'}f'\alpha'\,d\alpha'}{\left[(a'^2l+a^2l')\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}-aa'(l+l')\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l'}{a}\right]\sin.\frac{\lambda l}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}}.$$

Si l'on compare les deux dernières équations (f) aux deux premières, on voit qu'elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles renferment les fonctions F et F' au lieu de f et f', et $A\lambda$ à la place de B; l'expression du coefficient A qu'on en déduira, sera donc

$$A=\frac{2a'^2\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\int\sin.\frac{\lambda\alpha}{a}F\alpha\,d\alpha+2a^2\sin.\frac{\lambda l}{a}\int\sin.\frac{\lambda\alpha'}{a'}F'\alpha'\,d\alpha'}{\lambda\left[(a'^2l+a^2l')\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}-aa'(l+l')\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l}{a}\right]\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}};$$

les intégrales étant aussi prises depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=l$, et depuis $\alpha'=0$ jusqu'à $\alpha'=l'$.

Telles sont les valeurs de A et B qui résultent de l'état initial des deux parties de la corde, et qu'il faudra substituer dans les équations (d) et (e) pour connaître, au bout d'un temps donné, l'ordonnée et la vîtesse d'un point quelconque de l'une ou l'autre de ces deux parties.

[24.] Pour confirmer, s'il en était besoin, cette solution générale du problème que nous nous étions proposé, nous allons en faire l'application au cas de la corde homogène dans toute sa longueur, lequel est compris dans le cas général en faisant $a' = a$. D'après l'équation (c), nous aurons alors

$$\lambda = \frac{i\pi a}{l+l'};$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et i un nombre entier quelconque que nous supposerons positif. En appelant $l_{,}$ la longueur totale $l+l'$ de la corde, et observant que $x' = l_{,} - x$, les équations (f) deviendront

$$fx = \Sigma B \sin. \frac{i\pi l'}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi x}{l_{,}}, \quad f'(l_{,}-x) = \Sigma B \sin. \frac{i\pi l'}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi x}{l_{,}};$$

$$Fx = \Sigma \frac{Ai\pi a}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi l'}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi x}{l_{,}}, \quad F'(l_{,}-x) = \Sigma \frac{Ai\pi a}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi l'}{l} \sin. \frac{i\pi x}{l_{,}};$$

et si nous représentons par $f_{,}x$ et $F_{,}x$, l'ordonnée et la vîtesse initiales d'un point quelconque de la corde, de sorte qu'on ait $f_{,}x = fx$, $F_{,}x = Fx$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et $f_{,}x = f'(l_{,} - x)$, $F_{,}x = F'(l_{,} - x)$, depuis $x = l$ jusqu'à $x = l_{,}$, il est évident que ces quatre formules se réduiront à deux, savoir :

$$f_{,}x = \Sigma B \sin. \frac{i\pi l'}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi x}{l_{,}}, \quad F_{,}x = \Sigma \frac{Ai\pi a}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi l'}{l_{,}} \sin. \frac{i\pi x}{l_{,}}.$$

En même temps, si l'on fait $\alpha' = l_{,} - \beta$ dans les valeurs générales de A et B, et qu'on y substitue pour λ sa valeur précédente, on en déduit

$$B \sin. \frac{i\pi l'}{l_{,}} = \frac{2}{l_{,}} \int \sin. \frac{i\pi \alpha}{l_{,}} f\alpha\, d\alpha + \frac{2}{l_{,}} \int \sin. \frac{i\pi \beta}{l_{,}} f'(l_{,}-\beta)\, d\beta,$$

$$\frac{Ai\pi a}{l_{,}}\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}=\frac{2}{l_{,}}\int\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}F\alpha d\alpha+\frac{2}{l_{,}}\int\sin.\frac{i\pi\beta}{l_{,}}F'(l_{,}-\beta)\,d\beta,$$

les intégrales relatives à β étant prises depuis $\beta=l$ jusqu'à $\beta=l_{,}$. Il est évident que les deux intégrales définies, comprises dans chacune de ces équations, sont les deux parties d'une seule intégrale dont les limites sont zéro et $l_{,}$, et que nous aurons simplement

$$B\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}=\frac{2}{l_{,}}\int\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}f_{,}\alpha\,d\alpha,$$

$$\frac{Ai\pi a}{l_{,}}\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}=\frac{2}{l_{,}}\int\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}F_{,}\alpha\,d\alpha,$$

pourvu que l'on intègre depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=l_{,}$. En substituant ces valeurs dans celles de $f_{,}x$ et $F_{,}x$, on a

$$\left.\begin{aligned}f_{,}x&=\frac{2}{l_{,}}\int\left(\Sigma\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\sin.\frac{i\pi x}{l_{,}}\right)f_{,}\alpha\,d\alpha,\\F_{,}x&=\frac{2}{l_{,}}\int\left(\Sigma\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\sin.\frac{i\pi x}{l_{,}}\right)F_{,}\alpha\,d\alpha;\end{aligned}\right\}\quad(g)$$

or, si l'on observe que la caractéristique Σ s'étend à toutes les valeurs positives et entières de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$, et que, par hypothèse, les fonctions $f_{,}x$ et $F_{,}x$ s'évanouissent aux limites zéro et $l_{,}$ des intégrales, on voit que chacune de ces deux formules coïncide avec la première équation (7) du n.° 5, que nous avons démontrée directement; ce qui peut déjà servir à vérifier l'exactitude et la généralité de notre analyse.

Si nous représentons de même, au bout d'un temps t, par y, l'ordonnée qui répond à l'abscisse x dans toute la longueur de la corde, nous pourrons aussi comprendre en une seule les deux équations (d) : cette formule, qui aura lieu depuis $x=0$ jusqu'à $x=l_{,}$, sera

$$y_{,}=\Sigma A\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}\sin.\frac{ix}{l_{,}}\sin.\frac{i\pi at}{l_{,}}+\Sigma B\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}\sin.\frac{i\pi x}{l_{,}}\cos.\frac{i\pi at}{l_{,}};$$

elle montre clairement que la corde entière reviendra à la même posi-

tion et reprendra la même figure, au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{2\,l_{,}}{a}$: ainsi, quelles que soient sa figure et sa vîtesse initiales, la corde homogène fait des oscillations égales et isochrones ; et cette quantité $\frac{2\,l_{,}}{a}$ exprime la durée de chaque oscillation entière, l'allée et le retour compris, comme on le sait depuis long-temps. On voit aussi que si l'on désigne par Y l'ordonnée qui répond au temps t et à l'abscisse $l_{,}-x$, et par Y' celle qui répond à l'abscisse x et au temps $t+\frac{l_{,}}{a}$, on a $Y'=-Y$; d'où il résulte qu'au bout de chaque demi-oscillation, la corde reprend la même figure, mais dans une position inverse, par rapport à ses extrémités et à la droite qui les joint; ce qui est encore une propriété connue de la corde vibrante homogène.

Nous ne nous arrêterons pas à examiner les cas dans lesquels il se forme des *nœuds* qui divisent la corde en parties égales et semblables, et réduisent la durée de ses vibrations à un sous-multiple de $\frac{2\,l_{,}}{a}$; mais nous allons montrer, au moyen des équations (g), comment l'expression de $y_{,}$ se change en une autre plus simple, qui renferme explicitement les deux fonctions arbitraires $f_{,}$ et $F_{,}$.

[25.] Observons d'abord que la valeur de $y_{,}$ est la même chose que

$$y_{,}=\frac{1}{2}\Sigma A\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}\left(\cos.\frac{i\pi(x-at)}{l_{,}}-\cos.\frac{i\pi(x+at)}{l_{,}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\Sigma B\sin.\frac{i\pi l'}{l_{,}}\left(\sin.\frac{i\pi(x-at)}{l_{,}}+\sin.\frac{i\pi(x+at)}{l_{,}}\right).$$

Désignons par n et n' deux nombres quelconques, et par z et z', deux quantités positives, comprises entre zéro et $l_{,}$; nous pourrons toujours supposer

$$x+at=n\,l_{,}+z,\qquad x-at=n'\,l_{,}+z';$$

mettant de plus pour A et B leurs valeurs dans l'expression de $y_{,}$, et observant que $\cos.\,in\pi=(-1)^{in}$, $\cos.\,in'\pi=(-1)^{in'}$, on trouve

$$y_{,}=\frac{1}{a}\int\left[\Sigma\frac{1}{i\pi}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\left((-1)^{in'}\cos.\frac{i\pi z'}{l_{,}}-(-1)^{in}\cos.\frac{i\pi z}{l_{,}}\right)\right]F_{,}\alpha\, d\alpha$$

$$+\frac{1}{l_{,}}\int\left[\Sigma\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\left((-1)^{in'}\sin.\frac{i\pi z'}{l_{,}}+(-1)^{in}\sin.\frac{i\pi z}{l_{,}}\right)\right]f_{,}\alpha\, d\alpha.$$

Multiplions la seconde équation (g) par dx, posons $F_{,}xdx=dF_{,,}x$, et intégrons ensuite depuis $x=z$ jusqu'à $x=z'$, ce qui est permis, puisque cette équation subsiste pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et $l_{,}$; nous aurons

$$F_{,,}z'-F_{,,}z=-2\int\left[\Sigma\frac{1}{i\pi}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\left(\cos.\frac{i\pi z'}{l_{,}}-\cos.\frac{i\pi z}{l_{,}}\right)\right]F_{,}\alpha\, d\alpha;$$

donc, en vertu de cette équation et de la première équation (g), la valeur de $y_{,}$ deviendra, quand n et n' seront deux nombres pairs,

$$y_{,}=\frac{1}{2a}(F_{,,}z-F_{,,}z')+\frac{1}{2}(f_{,}z+f_{,}z').$$

L'équation précédente et la première équation (g) donnent aussi

$$F_{,,}(l_{,}-z')-F_{,,}(l_{,}-z)=-2\int\left[\Sigma\frac{1}{i\pi}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\left((-1)^{i}\cos.\frac{i\pi z'}{l_{,}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(-1)^{i}\cos.\frac{i\pi z}{l_{,}}\right)\right]F_{,}\alpha\, d\alpha,$$

$$f_{,}(l_{,}-z')+f_{,}(l_{,}-z)=-\frac{2}{l_{,}}\int\left[\Sigma\sin.\frac{i\pi\alpha}{l_{,}}\left((-1)^{i}\sin.\frac{i\pi z'}{l_{,}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{i}\sin.\frac{i\pi z}{l_{,}}\right)\right]f_{,}\alpha\, d\alpha;$$

par conséquent, lorsque n et n' seront deux nombres impairs, la valeur de $y_{,}$ prendra la forme :

$$y_{,}=\frac{1}{2a}[F_{,,}(l_{,}-z)-F_{,,}(l_{,}-z')]-\frac{1}{2}[f_{,}(l_{,}-z)+f_{,}(l_{,}-z')].$$

On trouvera semblablement, si n est pair et n' impair,

$$y_{,}=\frac{1}{2a}[F_{,,}z-F_{,,}(l_{,}-z')]+\frac{1}{2}[f_{,}z-f_{,}(l_{,}-z')],$$

et si n est impair et n' pair,

$$y_{,}=\frac{1}{2a}[F_{,,}(l_{,}-z)-F_{,,}z']-\frac{1}{2}[f_{,}(l_{,}-z)-f_{,}z'].$$

En considérant avec un peu d'attention ces quatre formules, il est aisé de voir qu'elles peuvent être réunies en une seule, savoir :

$$\begin{aligned}y_{,}=\frac{1}{4a}\{&[1+(-1)^{n}]F_{,,}z+[1-(-1)^{n}]F_{,,}(l_{,}-z)-[1+(-1)^{n'}]F_{,,}z'\\&-[1-(-1)^{n'}]F_{,,}(l_{,}-z')\}\\+\frac{1}{4}\{&[1+(-1)^{n}]f_{,}z-[1-(-1)^{n}]f_{,}(l_{,}-z)+[1+(-1)^{n'}]f_{,}z'\\&-[1-(-1)^{n'}]f_{,}(l_{,}-z')\};\end{aligned}$$

et l'on peut aussi s'assurer facilement que cette formule générale coïncide avec les règles connues pour construire, à un instant quelconque, la figure de la corde vibrante homogène.

[26.] Il existe un autre cas particulier, le plus simple après celui de la corde homogène, qui mérite aussi d'être remarqué : ce cas est celui où l'on a $\frac{l'}{a'}=\frac{l}{a}$. L'équation (c) donne alors

$$\lambda=\frac{i\pi a}{2l}=\frac{i\pi a'}{2l'};$$

i et π ayant les mêmes significations que précédemment. Si l'on substitue pour λ cette valeur dans les équations (d), on en conclura ensuite, sans aller plus loin, que, quel que soit l'état initial des deux parties de la corde, tous leurs points reviennent à la même position au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{4l}{a}$ ou à $\frac{4l'}{a'}$; de manière que la corde entière fait toujours des oscillations égales et isochrones, dont chacune a la même durée que dans le cas d'une corde homogène, de même matière que l'une de ses deux parties et d'une longueur double. En comparant ces équations (d) aux équations (f), après y avoir substitué la valeur de λ, on pourra aussi, par des considérations semblables à

celles du n.° précédent, exprimer explicitement les ordonnées y et y', au moyen des fonctions arbitraires f, f', F et F'. Cette transformation ne présente aucune difficulté; mais si l'on veut, comme dans le cas de la corde homogène, vérifier les équations (f), et s'assurer que les expressions de ces quatre fonctions représentent réellement toutes leurs valeurs, il y aura, dans le calcul des quantités A et B, une attention essentielle à avoir, sans laquelle on pourrait croire que les équations (f) ne sont point exactes, du moins dans le cas particulier que nous considérons.

Pour effectuer ce calcul de manière à prévenir toute difficulté, écrivons d'abord l'équation du n.° 23, qui donne la valeur de B, sous cette forme :

$$B\sin.\frac{\lambda l'}{a'}=\frac{2a'^2}{D}\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}}{\sin.\frac{\lambda l}{a}}\int\sin.\frac{\lambda\alpha}{a}f\alpha d\alpha+\frac{2a^2}{D}\int\sin.\frac{\lambda\alpha'}{a'}f'\alpha d\alpha',$$

en faisant, pour abréger,

$$(a'^2l+a^2l')\sin.\frac{\lambda l'}{a'}\sin.\frac{\lambda l}{a}-aa'(l+l')\cos.\frac{\lambda l'}{a'}\cos.\frac{\lambda l}{a}=D.$$

Dans le cas de $\frac{a}{l}=\frac{a'}{l'}$, et en y mettant pour λ sa valeur, cette quantité D devient

$$D=-aa'(l+l')(-1)^i;$$

et si l'on fait la même substitution dans le second membre de l'équation précédente, excepté dans le rapport $\sin.\frac{\lambda l'}{a'}:\sin.\frac{\lambda l}{a}$ que son premier terme renferme, on a

$$B\sin.\frac{\lambda l'}{a'}=-\frac{2l'(-1)^i}{l(l+l')}\cdot\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}}{\sin.\frac{\lambda l}{a}}\int\sin.\frac{i\pi\alpha}{2l}f\alpha d\alpha$$

$$-\frac{2l(-1)^i}{l'(l+l')}\int\sin.\frac{i\pi\alpha'}{2l'}f'\alpha'd\alpha'.$$

Relativement à ce rapport, observons qu'il n'est pas toujours égal à l'unité, lorsqu'on fait $\frac{l'}{a'} = \frac{l}{a}$: en ayant égard à la valeur de λ qui a lieu en même temps, on voit qu'il se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, toutes les fois que i est un nombre pair; en sorte que pour avoir, dans tous les cas, sa valeur exacte, nous ferons d'abord $\frac{l'}{a'} = \frac{l}{a}(1+h)$, h étant une quantité infiniment petite, que nous supposerons tout-à-fait nulle à la fin du calcul. De cette manière, nous aurons, en négligeant le carré de h,

$$\sin.\frac{\lambda l'}{a'} : \sin.\frac{\lambda l}{a} = 1 + \frac{h\lambda l}{a}\cos.\frac{\lambda l}{a} : \sin.\frac{\lambda l}{a};$$

et si nous ne conservons de même que la première puissance de h, nous tirerons de l'équation (c)

$$\lambda = \frac{i.\pi a}{2l} - \frac{hi\pi a}{4l(a+a')}\left[a'+a+(a'-a)(-1)^i\right],$$

et par suite

$$\sin.\frac{\lambda l}{a} = \sin.\frac{i\pi}{2} - \frac{hi\pi}{4(a+a')}\left[a'+a+(a'-a)(-1)^i\right]\cos.\frac{i\pi}{2};$$

d'où nous concluons, en négligeant toujours le carré de h,

$$\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}}{\sin.\frac{\lambda l}{a}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}hi\pi\cos.\frac{i\pi}{2}}{\sin.\frac{i\pi}{2} - \frac{hi\pi}{4(a+a')}\left[a'+a+(a'-a)(-1)^i\right]\cos.\frac{i\pi}{2}}.$$

Si i est impair, cette quantité se réduit à l'unité, quand on y fait $h=0$; si i est pair, elle est égale à $1-\frac{a+a'}{a'}$ ou à $1-\frac{l+l'}{l'}$; et pour comprendre les deux cas en un seul, nous poserons

$$\frac{\sin.\frac{\lambda l'}{a'}}{\sin.\frac{\lambda l}{a}} = 1 - \frac{l+l'}{2l'}\left[1+(-1)^i\right].$$

Il résulte de là

$$B \sin. \frac{\lambda l'}{a'} = \frac{[1+(-1)^i]}{l} \int \sin. \frac{i\pi\alpha}{2l} f\alpha\, d\alpha - \frac{2l'(-1)^i}{l(l+l')} \int \sin. \frac{i\pi\alpha}{2l} f\alpha\, d\alpha$$
$$- \frac{2l(-1)^i}{l'(l+l')} \int \sin. \frac{i\pi\alpha'}{2l'} f'\alpha'\, d\alpha'.$$

Je substitue cette valeur et celle de λ dans la première équation (f); il vient

$$fx = \frac{2}{l} \int \left(\Sigma \frac{[1+(-1)^i]}{2} \sin. \frac{i\pi\alpha}{2l} \sin. \frac{i\pi x}{2l} \right) f\alpha\, d\alpha$$
$$- \frac{2l'}{l(l+l')} \int \left(\Sigma (-1)^i \sin. \frac{i\pi\alpha}{2l} \sin. \frac{i\pi x}{2l} \right) f\alpha\, d\alpha$$
$$- \frac{2l}{l'(l+l')} \int \left(\Sigma (-1)^i \sin. \frac{i\pi\alpha'}{2l'} \sin. \frac{i\pi x}{2l} \right) f'\alpha'\, d\alpha';$$

expression dans laquelle les trois sommes indiquées par la caractéristique Σ doivent s'étendre à toutes les valeurs entières et positives de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$, et les intégrales doivent être prises depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha'=l$, et depuis $\alpha'=0$ jusqu'à $\alpha'=l'$. La première des trois parties qui composent cette valeur de fx, est évidemment la même chose que

$$\frac{2}{l} \int \left(\Sigma \sin. \frac{i\pi\alpha}{l} \sin. \frac{i\pi x}{l} \right) f\alpha\, d\alpha;$$

or, d'après la première équation (7) du n.° 5, cette quantité est égale à fx pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et l : elle est évidemment nulle à ces deux limites ; mais comme fx ne l'est pas à la seconde limite, il s'ensuit que la somme des deux autres parties de l'expression de fx doit être égale à fl pour $x=l$, et à zéro pour toutes les valeurs de x positives et plus petites que l. C'est, en effet, ce que nous allons vérifier dans le n.° suivant, au moyen des principes exposés dans la première partie de ce Mémoire.

Les quatre équations (f) étant de la même nature, ce qu'on dit de l'une d'elles s'applique également aux trois autres; en sorte qu'on peut

regarder les expressions de $f'x$, Fx et $F'x$ comme vérifiées, en même temps que l'expression de fx.

[27.] Faisons, pour abréger,

$$-\frac{2\,l'}{l\,(l+l')}\int\left(\Sigma\,(-1)^i \sin.\frac{i\,\pi\,\alpha}{2\,l}\sin.\frac{i\,\pi\,x}{2\,l}\right)f\alpha\,d\alpha = X\,,$$

$$-\frac{2\,l}{l'\,(l+l')}\int\left(\Sigma\,(-1)^i \sin.\frac{i\,\pi\,\alpha'}{2\,l'}\sin.\frac{i\,\pi\,x}{2\,l}\right)f'\alpha'\,d\alpha' = X'\,;$$

la question consistera à trouver les valeurs X et X', pour une valeur positive de x, qui ne soit pas plus grande que l. Pour cela, considérons en général la série convergente $\Sigma\,(-1)^i\,e^{-ki}\cos.\,i\,\theta$: la somme étant prise depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$, nous aurons par les règles connues

$$\Sigma\,(-1)^i\,e^{-ki}\cos.\,i\,\theta = \frac{e^k-e^{-k}}{2\,(e^k+2\cos.\theta+e^{-k})}-\frac{1}{2}\,;$$

mettant donc successivement $\frac{(x+\alpha)\,\pi}{2\,l}$ et $\frac{(x-\alpha)\,\pi}{2\,l}$ à la place de t, et retranchant l'un des résultats de l'autre, il en résulte

$$-2\,\Sigma\,(-1)^i\,e^{-ki}\sin.\frac{i\,\pi\,\alpha}{2\,l}\sin.\frac{i\,\pi\,x}{2\,l} = \frac{e^k-e^{-k}}{2\left(e^k+2\cos.\frac{(x+\alpha)\pi}{2}+e^{-k}\right)} - \frac{e^k-e^{-k}}{2\left(e^k+2\cos.\frac{(x-\alpha)\pi}{2\,l}+e^{-k}\right)}\,;$$

par conséquent, nous aurons

$$X = \frac{l'}{2\,l\,(l+l')}\left(\int\frac{(e^k-e^{-k})\,f\alpha\,d\alpha}{e^k+2\cos.\frac{(x+\alpha)\,\pi}{2\,l}+e^{-k}} - \int\frac{(e^k-e^{-k})\,f\alpha\,d\alpha}{e^k+2\cos.\frac{(x-\alpha)\,\pi}{2\,l}+e^{-k}}\right);$$

pourvu que l'on fasse $k=0$ après les intégrations.

Supposons d'abord l'exposant k infiniment petit; les coefficiens de $d\alpha$ sous les signes $\int$ le seront aussi, excepté pour les valeurs de α qui peuvent rendre leurs dénominateurs infiniment petits : les intégrales étant prises depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$, cette exception ne peut avoir lieu, tant que la variable x est positive et $< l$; donc pour de semblables valeurs de x, on a toujours $X = 0$. Lorsqu'on a $x = l$, le second dénominateur ne peut pas non plus devenir infiniment petit; mais le premier le devient pour les valeurs de α qui diffèrent infiniment peu de l: si donc on fait $x = l$ et $\alpha = l - u$, on pourra supprimer la seconde intégrale, et ne prendre la première que depuis $u = \beta$ jusqu'à $u = 0$; β étant une quantité positive et infiniment petite. Alors, en négligeant les termes du troisième ordre par rapport à k et à u, on aura

$$e^k - e^{-k} = 2k, \quad e^k + 2\cos.\frac{(x+\alpha)\pi}{2l} + e^{-k} = k^2 + \frac{\pi^2 u^2}{4l^2};$$

et par conséquent,

$$X = \frac{l'}{l(l+l')}\int \frac{k f(l-u)\, du}{k^2 + \frac{\pi^2 u^2}{4l^2}};$$

l'intégrale étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \beta$. Entre ces limites, nous pourrons regarder $f(l-u)$ comme invariable et égale à fl; nous aurons donc, en effectuant l'intégration,

$$X = \frac{2l'fl}{\pi(l+l')} \text{ arc } \left(\text{tang.} = \frac{\pi\beta}{2kl}\right);$$

et si nous faisons $k = 0$, il en résultera

$$X = \frac{l'fl}{l+l'}.$$

Par un moyen semblable, on s'assurera que $X' = 0$ pour toutes les valeurs de x positives et $< l$; et pour $x = l$, on trouvera

$$X' = \frac{lf'l'}{l+l'};$$

mais, par hypothèse, on a $f'\,l' = f\,l$; donc, pour cette valeur particulière $x = l$, nous aurons

$$X + X' = f\,l;$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

[28.] Dans les deux cas que nous avons pris pour exemples, toutes les racines de l'équation (c) étaient commensurables entre elles, et par suite les oscillations de la corde étaient égales et isochrones, quel que fût son état initial; mais cette circonstance n'a plus lieu dans d'autres cas; en sorte que si la corde a été ébranlée au hasard, elle n'exécutera pas de vibrations isochrones, et ne fera entendre qu'une sorte de bruit, au lieu d'un son régulier. Pour qu'elle fasse des oscillations simples et régulières, il faut, en général, que chacune des séries contenues dans les équations (d) se réduise à un seul terme; ce qui suppose un mode particulier d'ébranlement primitif. Ainsi, en désignant par r une racine déterminée de l'équation (c), par A' et B' les valeurs de A et B qui répondent à $\lambda = r$, et supposant ces mêmes quantités A et B nulles pour toutes les autres valeurs de λ, les équations (d) se réduiront à

$$y = A' \sin.\frac{r\,l'}{a'} \sin.\frac{r\,x}{a} \sin.\, r\,t + B' \sin.\frac{r\,l'}{a'} \sin.\frac{r\,x}{a} \cos.\, r\,t,$$

$$y' = A' \sin.\frac{r\,l}{a} \sin.\frac{r\,x'}{a'} \sin.\, r\,t + B' \sin.\frac{r\,l}{a} \sin.\frac{r\,x'}{a'} \cos.\, r\,t;$$

où nous voyons que la corde entière fera des oscillations égales et isochrones, et que la durée de chaque vibration sera égale à $\frac{2\pi}{r}$. Il y a donc une infinité de *tons* réguliers que peut faire entendre une corde composée de deux parties différentes, pourvu qu'elle soit convenablement ébranlée. Le plus grave de tous est celui qui répond à la plus petite racine de l'équation (c), laquelle sera toujours facile à calculer par approximation, lorsque les valeurs de l, l', a et a', seront données. Il pourra aussi se former des nœuds de vibrations sur chacune des deux

parties de la corde : on en déterminera la position en faisant

$$\sin.\frac{rx}{a}=0 \quad \text{ou} \quad \sin.\frac{rx'}{a'}=0,$$

et examinant s'il en résulte des valeurs de x ou x' plus petites que l ou l'.

La figure initiale des deux parties de la corde sera déterminée par ces équations :

$$y=fx=B'\sin.\frac{rl'}{a'}\sin.\frac{rx}{a}, \quad y'=f'x'=B'\sin.\frac{rl}{a}\sin.\frac{lx'}{a'};$$

mettant α et α' à la place de x et x', et substituant ces valeurs de $f\alpha$ et $f'\alpha'$ dans l'expression générale de B [n.° 23], on vérifie qu'elle est égale à zéro toutes les fois que r et λ sont deux racines différentes de l'équation (c); mais quand on a $\lambda=r$, on trouve

$$B=\frac{B'\left(a'^2\,l\sin.^2\frac{rl'}{a'}+a^2\,l'\sin.^2\frac{rl}{a}\right)}{(a'^2l+a^2l')\sin.^2\frac{rl'}{a'}\sin.^2\frac{rl}{a}-aa'(l+l')\cos.\frac{rl'}{a'}\cos.\frac{rl}{a}\sin.\frac{rl'}{a'}\sin.\frac{rl}{a}};$$

et, en vertu de l'équation (c), il est aisé de s'assurer que le dénominateur de cette fraction est égal à

$$a'^2\,l\sin.^2\frac{rl'}{a'}+a^2\,l'\sin.^2\frac{rl}{a};$$

d'où il résulte $B=B'$. On vérifiera de même que le coefficient A est nul, tant que λ et r sont deux racines différentes, et qu'il est égal à A' quand $\lambda=r$.

[29.] *Euler* et *D. Bernouilli* ont aussi cherché à déterminer la suite des tons que peut rendre une corde composée de deux parties d'inégales densités (*); mais les résultats qu'ils ont obtenus sont loin de s'accorder

(*) Mémoires de Pétersbourg, années 1771 et 1772.

entre eux, et la différence qu'on y remarque tient à celle des principes dont ces deux géomètres sont partis. *Bernouilli* admet, comme une condition nécessaire, que les deux parties de la corde doivent avoir à l'origine et pendant toute la durée du mouvement, une tangente commune à leur point de jonction : partant ainsi du même principe que nous, la formule qu'il trouve pour calculer les durées des vibrations isochrones de la corde, coïncide exactement avec l'équation (c) que nous avons obtenue pour le même usage ; mais il y parvient par des considérations trop particulières, et il n'a pas, comme nous, déterminé la figure de la corde à un instant quelconque, d'après sa figure initiale et les vîtesses imprimées à ses différens points. *Euler*, au contraire, rejette la condition d'une tangente commune, comme entièrement superflue ; il suffit, selon lui, qu'au point de jonction les ordonnées des deux courbes soient égales entre elles, ce qui ne fournit qu'une seule équation ; mais en lisant son Mémoire avec un peu d'attention, on s'aperçoit que l'usage qu'il fait de cette équation unique, revient à la partager en deux autres, sans quoi elle ne suffirait pas, avec les autres données du problème, pour la détermination complète des fonctions arbitraires : et, en effet, d'après notre analyse du n.° 21, on conçoit qu'une de ces fonctions resterait indéterminée, si l'on n'avait point égard à la condition de la tangente commune, dont nous avons d'ailleurs démontré la nécessité. La solution d'*Euler* n'est donc point exacte, en ce qu'il a supprimé une condition essentielle du problème, et qu'il l'a remplacée en donnant à une autre condition plus d'étendue qu'elle n'en comporte.

Dans le cas ordinaire de la corde vibrante homogène, la question de la discontinuité de sa courbure n'intéresse que la généralité de l'analyse, et n'influe nullement sur le résultat auquel on parvient; il n'en est pas de même lorsque la corde est composée de deux parties différentes ; et dans ce cas, les restrictions qu'on doit apporter à cette discontinuité, sont un élément nécessaire de la détermination du mouvement. Il m'a donc semblé que la solution complète de ce problème serait propre à fixer les idées des géomètres sur la question importante de la discontinuité des fonctions

arbitraires, et à montrer clairement la nécessité des restrictions dont nous avons indiqué le principe général [n.° 19].

Notre analyse pourra également servir à déterminer le mouvement de l'air contenu dans un tube composé de deux parties de diamètres inégaux, et celui de deux fluides élastiques différens, superposés dans un même tube : ces questions seront parfaitement semblables à celle que nous avons résolue, si l'on suppose que la colonne fluide a été abandonnée à elle-même, aussitôt après avoir été ébranlée d'une manière quelconque; mais on peut voir, dans mon Mémoire sur la *Théorie des instrumens à vent* (*), que ce ne sont pas les vibrations dues à l'ébranlement primitif, qu'il importe de considérer, lorsqu'on veut connaître le ton qui sera rendu, dans chaque cas, par la colonne fluide.

Mouvement d'un Corps pesant suspendu à l'extrémité d'un Fil extensible.

[30.] Le fil est attaché par son autre extrémité à un point fixe ; il est parfaitement flexible, mais très-peu extensible : pour simplifier la question, on le suppose homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue ; on fait abstraction de la pesanteur qui agit sur ses différens points, et des dimensions du corps pesant attaché à son extrémité inférieure, en sorte que ce corps est regardé comme un point matériel, qui termine le fil, et dont on représentera le poids par P. Dans l'état d'équilibre, le fil est vertical, et P exprime la tension qu'il éprouve, et qui est la même dans toute sa longueur ; on l'écarte tant soit peu de cette position, de manière qu'il forme une courbe dont tous les points s'éloignent très-peu de la verticale, et dans laquelle les tangentes soient

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1817.

très-peu inclinées sur cette droite; de plus, on imprime à tous ses points et au corps pesant des vîtesses très-petites, et l'on fait éprouver à tous ses élémens des contractions ou des dilatations aussi très-petites: les lois de ces vîtesses et de ces dilatations, ainsi que la figure initiale du fil, sont, au reste, entièrement arbitraires. Cela posé, on abandonne le fil et le corps à eux-mêmes; et le problème qu'on se propose, consiste à déterminer le mouvement du corps et la figure du fil à un instant quelconque.

Nous conserverons toutes les notations du n.° 15; l'origine des coordonnées x', y et z sera placée au point fixe; les x' seront comptées sur la verticale et dans le sens de la pesanteur. Nous représenterons la gravité par g, de sorte que $\frac{P}{g}$ soit la masse de ce corps: il est soumis à l'action de deux forces, son poids et la tension du fil qui répond à l'extrémité inférieure; les trois équations de son mouvement seront donc

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2 x'}{d t^2} = P - T\frac{d x'}{d s},$$

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2 y}{d t^2} = - T\frac{d y}{d s}, \quad \frac{P}{g}\,\frac{d^2 z}{d t^2} = - T\frac{d z}{d s}.$$

Si nous faisons $x' = x + u$, et que nous négligions, comme dans le n.° 16, les carrés et les produits des quantités très-petites, ces équations deviendront

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = - g\gamma\frac{d u}{d x}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = - g\frac{d y}{d x}, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = - g\frac{d z}{d x}; \qquad \text{(a)}$$

et en désignant par l la longueur du fil, elles n'auront lieu que pour la valeur particulière $x = l$. Les expressions de u, y et z, relatives à une valeur quelconque de x, se déduiront des équations du n.° 16, savoir:

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = \frac{P\gamma}{e}\,\frac{d^2 u}{d x^2}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{P}{e}\,\frac{d^2 y}{d x^2}, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{P}{e}\,\frac{d^2 z}{d x^2}; \qquad \text{(b)}$$

dans lesquelles e représente le produit de l'épaisseur et de la densité

du fil dans l'état d'équilibre. Enfin, la tension en un point quelconque sera exprimée par

$$T = P\left(1 + \gamma \frac{du}{dx}\right);$$

γ étant un coefficient constant et positif, qui dépend de la matière du fil.

A cause que les variables u, y et z sont séparées dans ces équations, nous pouvons considérer isolément les oscillations du fil et du corps dans le sens vertical, et leurs oscillations transversales. Nous allons commencer par les premières, qui sont dépendantes de la variable u.

[31.] En intégrant la première équation (b), et faisant, pour abréger, $\frac{P\gamma}{\epsilon} = c^2$, on a

$$u = \varphi(x - ct) + \Phi(x + ct);$$

φ et Φ désignant les deux fonctions arbitraires. Le point de suspension étant supposé fixe, on a $u = 0$ pour $x = 0$, c'est-à-dire,

$$\varphi(-ct) + \Phi(ct) = 0.$$

Nous compterons le temps t de l'origine du mouvement ; cette équation, qui a lieu pendant toute sa durée, subsistera donc pour toutes les valeurs positives de t; et nous y pouvons mettre $t + \frac{x}{c}$ à la place de t, ce qui donne

$$\Phi(x + ct) = -\varphi(-x - ct);$$

au moyen de quoi la valeur générale de u devient

$$u = \varphi(x - ct) - \varphi(-x - ct).$$

On a identiquement

$$\frac{d\varphi(x-ct)}{dx} = -\frac{d\varphi(x-ct)}{c\,dt}, \quad \frac{d\varphi(-x-ct)}{dx} = \frac{d\varphi(-x-ct)}{c\,dt},$$

et, par conséquent,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{d\varphi(x-ct)}{c\,dt} - \frac{d\varphi(-x-ct)}{c\,dt}:$$

si donc on substitue dans la première équation (a), les valeurs de $\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\frac{du}{dx}$ qui répondent à $x=l$, on aura

$$\frac{d^2\varphi(l-ct)}{dt^2} - \frac{d^2\varphi(-l-ct)}{dt^2} - \frac{g\gamma}{c}\left[\frac{d\varphi(l-ct)}{dt} + \frac{d\varphi(-l-ct)}{dt}\right] = 0;$$

équation que l'on peut simplifier, en faisant

$$ct = s,\quad \frac{g\gamma}{c^2} = n^2,\quad \frac{d\varphi(l-ct)}{dt} = \psi s;$$

ce qui la change en celle-ci :

$$\frac{d\psi s}{ds} - \frac{d\psi(s+2l)}{ds} - n^2[\psi s + \psi(s+2l)] = 0. \qquad \text{(c)}$$

Cette équation aux différences mêlées étant linéaire et à coefficiens constans, son intégrale sera composée de termes de cette forme :

$$\psi s = A\cos.\lambda s + B\sin.\lambda s;$$

A, B et λ étant des constantes réelles ou imaginaires. On tire de là

$$\psi s - \psi(s+2l) = 2[A\sin.\lambda(s+l) - B\cos.\lambda(s+l)]\sin.\lambda l,$$
$$\psi s + \psi(s+2l) = 2[A\cos.\lambda(s+l) + B\sin.\lambda(s+l)]\cos.\lambda l;$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (c), il vient

$$2[A\cos.\lambda(s+l) + B\sin.\lambda(s+l)](\lambda\sin.\lambda l - n^2\cos.\lambda l] = 0;$$

ou simplement,

$$\lambda\sin.\lambda l - n^2\cos.\lambda l = 0. \qquad \text{(d)}$$

Les deux quantités A et B restent donc indéterminées, et il suffit que λ soit une des racines de cette dernière équation.

D'après cela, nous aurons, pour l'intégrale complète de l'équation (c);

$$\psi s = \Sigma A \cos. \lambda s + \Sigma B \sin. \lambda s;$$

les sommes Σ s'étendant à toutes les valeurs de λ, tirées de l'équation (d), et les coefficiens A et B étant des fonctions arbitraires de cette quantité. Il en résulte

$$\frac{d\varphi(l-ct)}{dt} = \Sigma A \cos. \lambda ct + \Sigma B \sin. \lambda ct;$$

et en intégrant par rapport à t, on a

$$\varphi(l-ct) = \frac{1}{c}\Sigma\frac{A}{\lambda}\sin. \lambda ct - \frac{1}{c}\Sigma\frac{B}{\lambda}\cos. \lambda ct + \text{const.}$$

On peut mettre à la place de t, dans cette expression, $t + \frac{l+x}{c}$ et $t + \frac{l-x}{c}$; de cette manière, on aura les valeurs de $\varphi(-x-ct)$ et $\varphi(x-ct)$, et par suite celle de u, savoir :

$$u = -\frac{2}{c}\Sigma\frac{A}{\lambda}\sin. \lambda x \cos. \lambda(ct+l) - \frac{2}{c}\Sigma\frac{B}{\lambda}\sin. \lambda x \sin. \lambda(ct+l);$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dt} = 2\Sigma A \sin. \lambda x \sin. \lambda(ct+l) - 2\Sigma B \sin. \lambda x \cos. \lambda(ct+l),$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{c}\Sigma A \cos. \lambda x \cos. \lambda(ct+l) - \frac{2}{c}\Sigma B \cos. \lambda x \sin. \lambda(ct+l).$$

L'élément du fil qui répond à l'abscisse x était dx dans l'état d'équilibre ; il est devenu $dx + \frac{du}{dx}dx$ dans l'état de mouvement ; ainsi $\frac{du}{dx}$ est la mesure de l'extension qu'il a subie ; $\frac{du}{dt}$ exprime sa vîtesse verticale ; les deux équations précédentes feront donc connaître l'état du fil entier à un instant quelconque, lorsqu'on aura déterminé les

coefficiens A et B en fonctions de λ, d'après son état initial. Nous allons donner leurs valeurs dans le n.° suivant; mais auparavant il convient d'observer que l'état d'équilibre dont le fil a été un tant soit peu écarté, étant un état stable, l'expression de u ne doit contenir que des fonctions périodiques, ce qui exige que toutes les racines de l'équation (d) soient réelles; et c'est aussi ce que l'on peut démontrer directement, d'après la forme de cette équation, dans laquelle n^2 est essentiellement une quantité positive. Les racines de l'équation (d) sont deux à deux égales et de signes contraires; mais il est aisé de voir qu'avant de déterminer les coefficiens A et B, nous pouvons convenir de ne considérer que les racines positives, et de n'étendre qu'à ces racines les sommes indiquées par la caractéristique Σ.

[32]. Supposons qu'on ait à l'origine du mouvement

$$\frac{du}{dt} = fx, \quad \frac{du}{dx} = Fx;$$

en sorte que fx et Fx soient des fonctions données arbitrairement, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$: la première seulement est assujettie à la condition $fx = 0$ quand $x = 0$. Si l'on fait $t = 0$ dans les valeurs générales de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du}{dx}$, il en résultera

$$fx = \Sigma C \sin. \lambda x, \quad Fx = \Sigma D \cos. \lambda x, \qquad \text{(e)}$$

en posant, pour abréger,

$$2A \sin. \lambda l - 2B \cos. \lambda l = C, \quad 2A \cos. \lambda l + 2B \sin. \lambda l = -cD.$$

Maintenant je désigne par λ' une racine positive quelconque de l'équation (d); je mets dans la seconde équation (e), α à la place de x; puis je multiplie par $\cos. \lambda' \alpha d\alpha$, et j'intègre ensuite les deux membres depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$; il vient

$$\int \cos. \lambda' \alpha \, F\alpha \, d\alpha = \Sigma D \left(\frac{\sin. (\lambda - \lambda') l}{2(\lambda - \lambda')} + \frac{\sin. (\lambda + \lambda') l}{2(\lambda + \lambda')} \right).$$

Or, excepté le cas où l'on a $\lambda' = \lambda$, le coefficient de D sous le signe Σ est égal à zéro; car il est la même chose que

$$\frac{\lambda \sin. \lambda l \cos. \lambda' l - \lambda' \sin. \lambda' l \cos. \lambda l}{\lambda^2 - \lambda'^2};$$

et en vertu de l'équation (d), dont λ et λ' sont deux racines, le numérateur de cette fraction est toujours nul. Son dénominateur l'est aussi, lorsqu'on a $\lambda' = \lambda$; la fraction se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$, et sa vraie valeur est

$$\frac{2 \lambda l + \sin. 2 \lambda l}{4 \lambda}.$$

La série qui forme le second membre de l'équation précédente, se réduit donc à un seul terme; par conséquent cette équation fait connaître immédiatement la valeur du coefficient D, que ce terme contient : nous aurons, pour cette valeur de D en fonction de λ,

$$D = \frac{4 \lambda \int \cos. \lambda \alpha F \alpha d \alpha}{2 \lambda l + \sin. 2 \lambda l}.$$

Si l'on différencie la première équation (e) par rapport à x, on a

$$\frac{d f x}{d x} = \Sigma C \lambda \cos. \lambda x;$$

elle a alors la même forme que la seconde équation (e); et, sans nouveaux calculs, on déduira la valeur de $C\lambda$ de celle de D, en mettant dans celle-ci $d f \alpha$ à la place de $F \alpha d \alpha$; on aura donc

$$C = \frac{4 \int \cos. \lambda \alpha d f \alpha}{2 \lambda l + \sin. 2 \lambda l};$$

l'intégrale étant prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$. La fonction $f \alpha$ est nulle à la première limite : pour simplifier, nous supposerons qu'elle l'est aussi à la seconde, c'est-à-dire, qu'à l'origine, le corps suspendu à l'extrémité du fil n'a reçu aucune vitesse verticale; nous aurons alors, en intégrant par parties,

$$C = \frac{4\lambda \int \sin.\lambda\alpha f\alpha\, d\alpha}{2\lambda l + \sin. 2\lambda l}.$$

Pour exprimer A et B au moyen de C et D, on a

$$A = \tfrac{1}{2}(C\sin.\lambda l - cD\cos.\lambda l),\quad B = -\tfrac{1}{2}(C\cos.\lambda l + cD\sin.\lambda l);$$

substituant ces valeurs dans l'expression de u du n.° précédent, il vient

$$u = \Sigma \frac{C}{c\lambda} \sin.\lambda x \sin.\lambda ct + \Sigma \frac{D}{\lambda} \sin.\lambda x \cos.\lambda ct;$$

il ne restera donc plus qu'à mettre pour C et D leurs valeurs dans cette formule, et elle exprimera la loi des oscillations verticales du corps que nous considérons, et des différens points du fil auquel il est attaché.

[33.] Si la masse du fil est très-petite par rapport à celle du corps, la quantité $n^2 l$ sera aussi très-petite; car on a $n^2 l = \frac{g\gamma l}{c^2} = \frac{gel}{P}$, et si l'on appelle h le rapport de la première masse à la seconde, on aura $gel = hP$ et $n^2 l = h$. On peut alors résoudre l'équation (d) en série très-convergente, ordonnée suivant les puissances de h, et calculer ensuite la valeur de u à tel degré d'approximation qu'on voudra. En se bornant au premier terme de cette série, on a $\lambda l = \sqrt{h}$ pour la plus petite racine de cette équation, et $\lambda l = i\pi$ pour toutes les autres; π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et i un nombre entier quelconque: nous le supposerons positif, afin de n'avoir que des racines positives de l'équation (d). Comme on a $c^2 = \frac{P\gamma}{e} = \frac{gl\gamma}{h}$, on aura, relativement à la première racine, $c\lambda = \sqrt{\frac{g\gamma}{l}}$; et l'on trouve pour le terme de u qui répond à cette racine,

$$u = \frac{x}{l}(\int F\alpha\, d\alpha) \cos. t\sqrt{\frac{g\gamma}{l}},$$

en négligeant la partie dépendante de h. Par rapport aux autres racines, on aura

$$C = \frac{2}{l}\int \sin. \frac{i\pi\alpha}{l} f\alpha\, d\alpha, \quad D = \frac{2}{l}\int \cos. \frac{i\pi\alpha}{l} F\alpha\, d\alpha;$$

et par conséquent,

$$u = \frac{2}{c}\int\left(\Sigma \frac{1}{i\pi} \sin. \frac{i\pi x}{l} \sin. \frac{i\pi c t}{l} \sin. \frac{i\pi\alpha}{l}\right) f\alpha\, d\alpha$$
$$+ 2\int\left(\Sigma \frac{1}{i\pi} \sin. \frac{i\pi x}{l} \cos. \frac{i\pi c t}{l} \cos. \frac{i\pi\alpha}{l}\right) F\alpha\, d\alpha.$$

L'inspection de ces deux parties de la valeur de u, nous montre que chacun des points du système fait deux espèces d'oscillations égales et isochrones ; dans les unes, la durée est égale à $2\pi\sqrt{\frac{l}{g\gamma}}$ pour chaque oscillation entière ; et dans les autres, cette durée est égale à $\frac{2l}{c}$, ou à $2\sqrt{\frac{lh}{g\gamma}}$. Celle-ci est celle qui répond à la propagation du son dans la matière dont le fil est composé ; et les oscillations de la seconde espèce ne sont autre chose que les vibrations longitudinales de ce fil, en le supposant attaché par ses deux extrémités à des points fixes, et tendu par une force égale au poids P. Les vibrations de la première espèce sont beaucoup plus lentes : la durée qui leur correspond est à celle qui répond aux autres, comme π est à $\sqrt{h}$.

Il est à remarquer que les vibrations de la seconde espèce sont nulles à l'extrémité inférieure du fil ; car il est évident que la seconde partie de u est égale à zéro, pour $x = l$. D'après ce que représente la fonction F, on voit aussi que l'intégrale $\int F\alpha\, d\alpha$, prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$, exprime la quantité dont le poids attaché à cette extrémité a été primitivement descendu au-dessous de sa position d'équilibre ; appelant donc a cet abaissement, et faisant $x = l$, dans la première partie de u, on aura, pour le mouvement du poids,

$$u = a \cos. t\sqrt{\frac{g\gamma}{l}};$$

d'où il résulte cette conséquence, que les oscillations verticales du poids

que nous considérons, sont indépendantes de l'état initial du fil auquel il est suspendu, et que leur amplitude, quel que soit cet état, est double de la quantité dont le poids a été écarté de sa position d'équilibre, à l'origine du mouvement.

Remarquons enfin qu'en faisant $t = 0$ dans les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du}{dx}$, on doit reproduire les fonctions fx et Fx; on doit donc avoir

$$fx = \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \sin.\frac{i\pi x}{l}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)f\alpha\, d\alpha,$$

$$Fx = \frac{1}{l}\int F\alpha\, d\alpha + \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \cos.\frac{i\pi x}{l}\cos.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)F\alpha\, d\alpha,$$

pour toutes les valeurs de x comprises depuis zéro jusqu'à l; et en effet, c'est ce qui résulte des équations (7) du n.° 5, en observant que les sommes Σ s'étendent depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$, et que les intégrales sont prises depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$.

[34.] Nous déterminerons de la même manière les oscillations transversales du corps et de tous les points du fil; et si nous comparons les secondes et les troisièmes équations (a) et (b) aux premières, nous voyons que les expressions générales de y et de z, devront se déduire de la valeur de u du n.° 31, en faisant dans celle-ci $\gamma = 1$. Dans cette formule, on a $c^2 = \frac{gl\gamma}{h}$; en faisant donc $b^2 = \frac{gl}{h}$, il faudra mettre b à la place de c; on aura, de cette manière,

$$y = -\frac{2}{b}\Sigma\frac{A}{\lambda}\sin.\lambda x\cos.\lambda(bt+l) - \frac{2}{b}\Sigma\frac{B}{\lambda}\sin.\lambda x\sin.\lambda(bt+l);$$

et en même temps

$$\frac{dy}{dt} = 2\Sigma A\sin.\lambda x\sin.\lambda(bt+l) - 2\Sigma B\sin.\lambda x\cos.\lambda(bt+l).$$

La quantité n qui entre dans l'équation (d) étant indépendante de γ, elle ne changera pas : on aura toujours $n^2 l = h$, et λ continuera d'être

une racine positive quelconque de cette même équation. Ce que nous dirons relativement à l'ordonnée horizontale y, s'appliquera littéralement à l'autre ordonnée z; en sorte qu'il nous suffira de considérer la première.

A l'origine du mouvement, la figure du fil est connue, et les vîtesses imprimées à ses différens points, dans le sens des y, sont aussi données ; soit donc à cette époque

$$\frac{dy}{dt} = fx, \quad y = Fx;$$

fx et Fx représentant des fonctions données arbitrairement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$: ces fonctions doivent être nulles pour $x = 0$, qui répond au point fixe; pour simplifier, nous supposerons qu'on a aussi $fx = 0$ à l'autre extrémité du fil. Ainsi, le corps attaché à cette extrémité n'a reçu primitivement aucune vîtesse; mais il a été écarté de la position d'équilibre, dans le sens horizontal, d'une quantité très-petite par rapport à la longueur du fil : nous représenterons cette quantité par β, et nous aurons $fl = 0$, $Fl = \beta$.

En faisant $t = 0$ dans les valeurs générales de y et $\frac{dy}{dt}$, et, pour abréger,

$$2A\sin.\lambda l - 2B\cos.\lambda l = C, \quad 2A\cos.\lambda l + 2B\sin.\lambda l = -E\delta\lambda,$$

il en résultera

$$fx = \Sigma\, C\sin.\lambda x, \quad Fx = \Sigma\, E\sin.\lambda x;$$

équations qui devront servir à déterminer les coefficiens C et E, en fonctions de λ. L'expression de C sera la même que dans le n.° 32, savoir :

$$C = \frac{4\lambda\int \sin.\lambda\alpha f\alpha\, d\alpha}{2\lambda l + \sin.2\lambda l}.$$

Quant à celle de E, nous aurons d'abord

$$E = \frac{4\int \cos.\lambda\alpha . d F\alpha}{2\lambda l + \sin.2\lambda l};$$

et en intégrant par parties, cette valeur deviendra

$$E = \frac{4\,\beta \cos.\lambda l + 4\,\lambda \int \sin.\lambda a\, F a\, d a}{2\lambda l + \sin.2\lambda l}.$$

Les quantités A et B, exprimées au moyen de C et E, seront

$$A = \tfrac{1}{2}[C \sin.\lambda l - E b \lambda \cos.\lambda l],\quad B = -\tfrac{1}{2}[C \cos.\lambda l + E b \lambda \sin.\lambda l];$$

l'expression de y deviendra, en conséquence,

$$y = \Sigma \frac{C}{b\lambda} \sin.\lambda x \sin.\lambda b t + \Sigma E \sin.\lambda x \cos.\lambda b t;$$

et en y mettant pour C et E leurs valeurs précédentes, elle fera connaître, à un instant quelconque, la figure du fil et la position du corps pesant attaché à son extrémité inférieure; ce qui est l'objet du problème que nous nous proposions de résoudre.

[35.] Examinons particulièrement le cas où la masse du corps est très-grande par rapport à celle du fil, et où la quantité h est très-petite. Les racines de l'équation (d) seront alors, à très-peu près, $\lambda l = \sqrt{h}$, $\lambda l = i\pi$, comme dans le n.° 33. Relativement à la première, on aura $b\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}$; et en négligeant ce qui dépend de h, le terme de y, correspondant à cette racine, sera simplement

$$y = \frac{\beta x}{l} \cos. t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

En prenant $\lambda l = i\pi$, nous aurons

$$C = \frac{2}{l}\int \sin.\frac{i\pi a}{l} f a\, d a,\quad E = \frac{2\beta(-1)^i}{i\pi} + \frac{2}{l}\int \sin.\frac{i\pi a}{l} F a\, d a;$$

et ensuite

$$\begin{aligned} y = {} & 2\beta\,\Sigma \frac{(-1)^i}{i\pi} \sin.\frac{i\pi x}{l} \cos.\frac{i\pi b t}{l} \\ & + \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \sin.\frac{i\pi x}{l} \cos.\frac{i\pi b t}{l} \sin.\frac{i\pi a}{l}\right) F a\, d a \\ & + \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \frac{1}{i\pi} \sin.\frac{i\pi x}{l} \sin.\frac{i\pi b t}{l} \sin.\frac{i\pi a}{l}\right) f a\, d a. \end{aligned}$$

Il résulte de ces deux parties de la valeur de y, que chacun des points du fil fera des oscillations égales et isochrones, de deux espèces différentes : dans les unes, la durée de chaque oscillation entière, l'allée et le retour compris, est égale à $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; et dans les autres, elle est exprimée par $\frac{2l}{b} = 2\sqrt{\frac{lh}{g}}$. En vertu des premières, tous les points du fil resteraient toujours en ligne droite, et le fil entier oscillerait également de part et d'autre de la verticale menée par son point de suspension. Si l'on veut rapporter à cette droite mobile, prise pour axe, les oscillations de la seconde espèce, il suffira de faire

$$y = \frac{\beta x}{l} \cos. t\sqrt{\frac{g}{l}} + y', \quad F\alpha = \frac{\beta \alpha}{l} + F'\alpha;$$

en intégrant depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = l$, on aura

$$\int \sin. \frac{i\pi\alpha}{l} \alpha d\alpha = -\frac{(-1)l^i}{i\pi};$$

et par conséquent,

$$y' = \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \sin. \frac{i\pi x}{l} \cos. \frac{i\pi bt}{l} \sin. \frac{i\pi\alpha}{l}\right) F'\alpha\, d\alpha$$
$$+ \frac{2}{l}\int\left(\Sigma \frac{1}{i\pi} \sin. \frac{i\pi x}{l} \sin. \frac{i\pi bt}{l} \sin. \frac{i\pi\alpha}{l}\right) f\alpha\, d\alpha.$$

De cette expression de y', on peut conclure que les oscillations de la seconde espèce, de part et d'autre de la droite mobile qui répond aux oscillations de la première, sont les mêmes que si les deux extrémités du fil étaient fixes, et qu'il fût tendu par une force égale au poids P.

La seconde partie de la valeur de y étant nulle pour $x = l$, l'ordonnée du corps attaché à l'extrémité du fil, sera simplement

$$y = \beta \sin. t\sqrt{\frac{g}{l}};$$

d'où il résulte que les petites oscillations transversales de ce corps pesant sont indépendantes des vibrations du fil, et les mêmes que s'il était

parfaitement inflexible, pourvu toutefois que la masse du fil soit très-petite par rapport à celle du corps, comme nous l'avons supposé. Cette circonstance a effectivement lieu dans l'appareil de *Borda*, dont les astronomes français font usage pour les observations du pendule ; il s'ensuit donc que si le fil de suspension faisait, pendant l'expérience, des vibrations comparables, dans leur amplitude, aux oscillations du pendule, la durée de celles-ci n'en serait pas sensiblement altérée ; et réciproquement, les vibrations du fil, et le son qu'elles pourraient produire, seraient les mêmes que si le pendule n'oscillait pas.

Si l'on fait $t=o$ dans la valeur générale de y, elle doit coïncider avec la fonction fx ; il faut donc qu'on ait, depuis $x=o$ jusqu'à $x=l$,

$$Fx=\frac{\beta x}{l}+2\beta\Sigma\frac{(-1)^i}{i\pi}\sin.\frac{i\pi x}{l}+\frac{2}{l}\int\left(\Sigma\sin.\frac{i\pi x}{l}\sin.\frac{i\pi\alpha}{l}\right)F\alpha d\alpha.$$

Cette équation a lieu aux deux limites, parce qu'on a $Fx=o$ pour $x=o$, et $Fx=\beta$ quand $x=l$. Pour qu'elle se vérifie également par rapport aux valeurs intermédiaires de x, il suffit, d'après la première équation (7) du n.° 5, que l'on ait pour toutes ces valeurs :

$$\frac{\beta x}{l}+2\beta\Sigma\frac{(-1)^i}{i\pi}\sin.\frac{i\pi x}{l}=o\,;$$

et en effet, θ étant un arc positif et plus petit que π, on a, par une formule connue,

$$\sin.\theta-\tfrac{1}{2}\sin.2\theta+\tfrac{1}{3}\sin.3\theta-\&c.=\tfrac{1}{2}\theta\,;$$

ce qui donne l'équation précédente, en faisant $\theta=\frac{\pi x}{l}$, et supposant $x<l$.

FIN.

ERRATA.

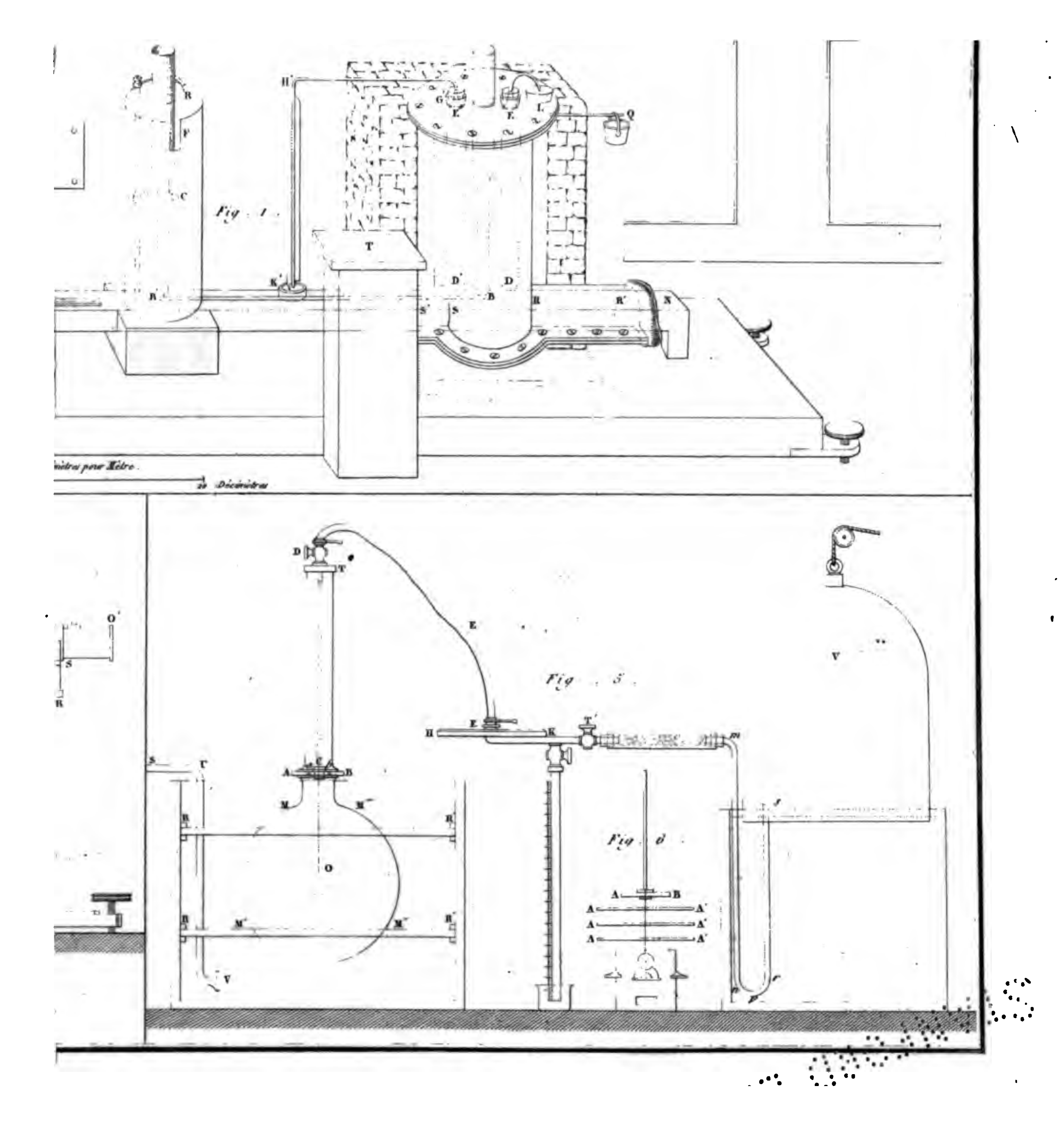
MÉMOIRE DE M. AMPÈRE.

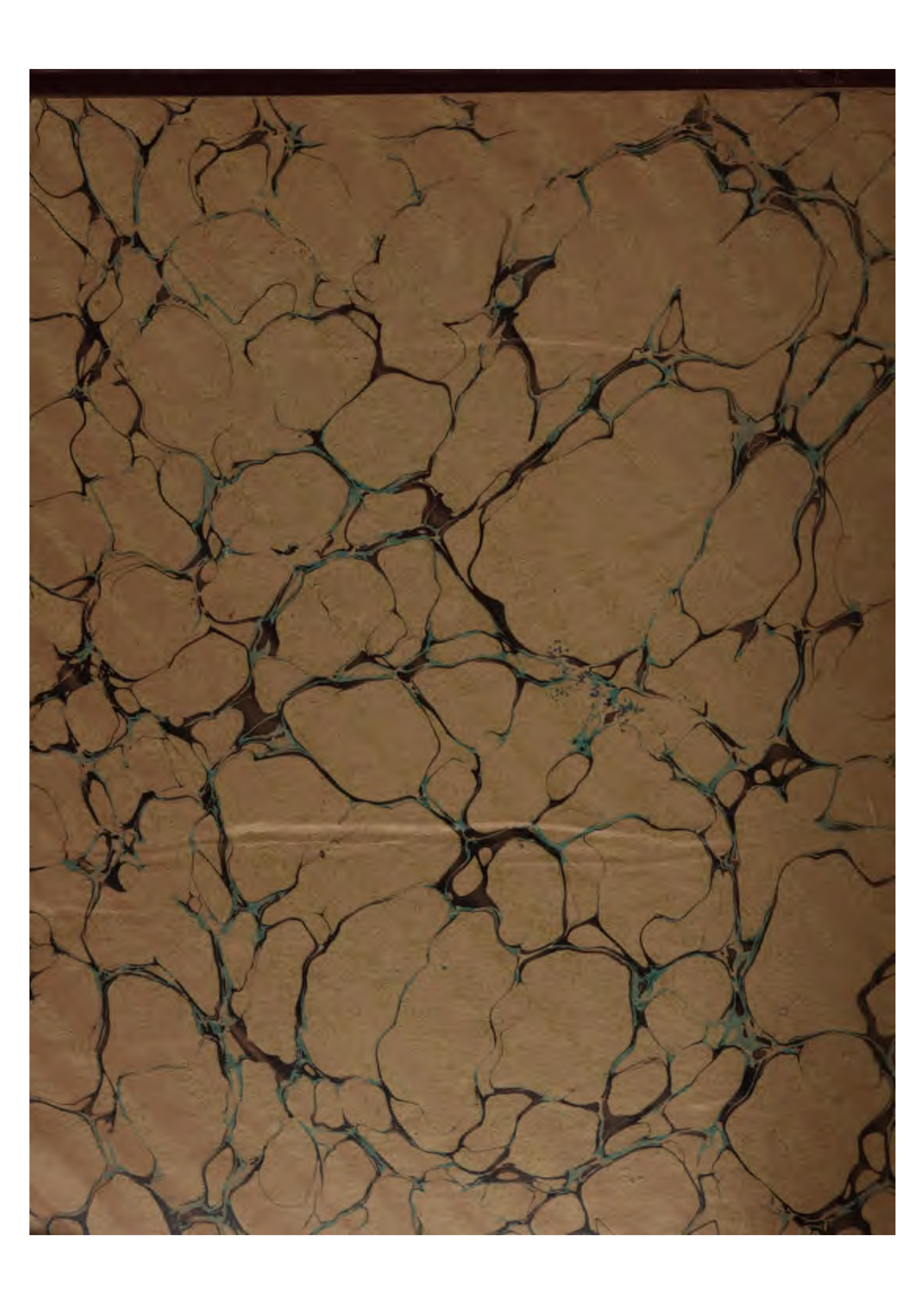
Page 171, ligne 15, *au lieu de* $r + 2qs + (q^2 - x^2) - q = 0$;
lisez $r + 2qs + (q^2 - x^2)\,t - q = 0$.

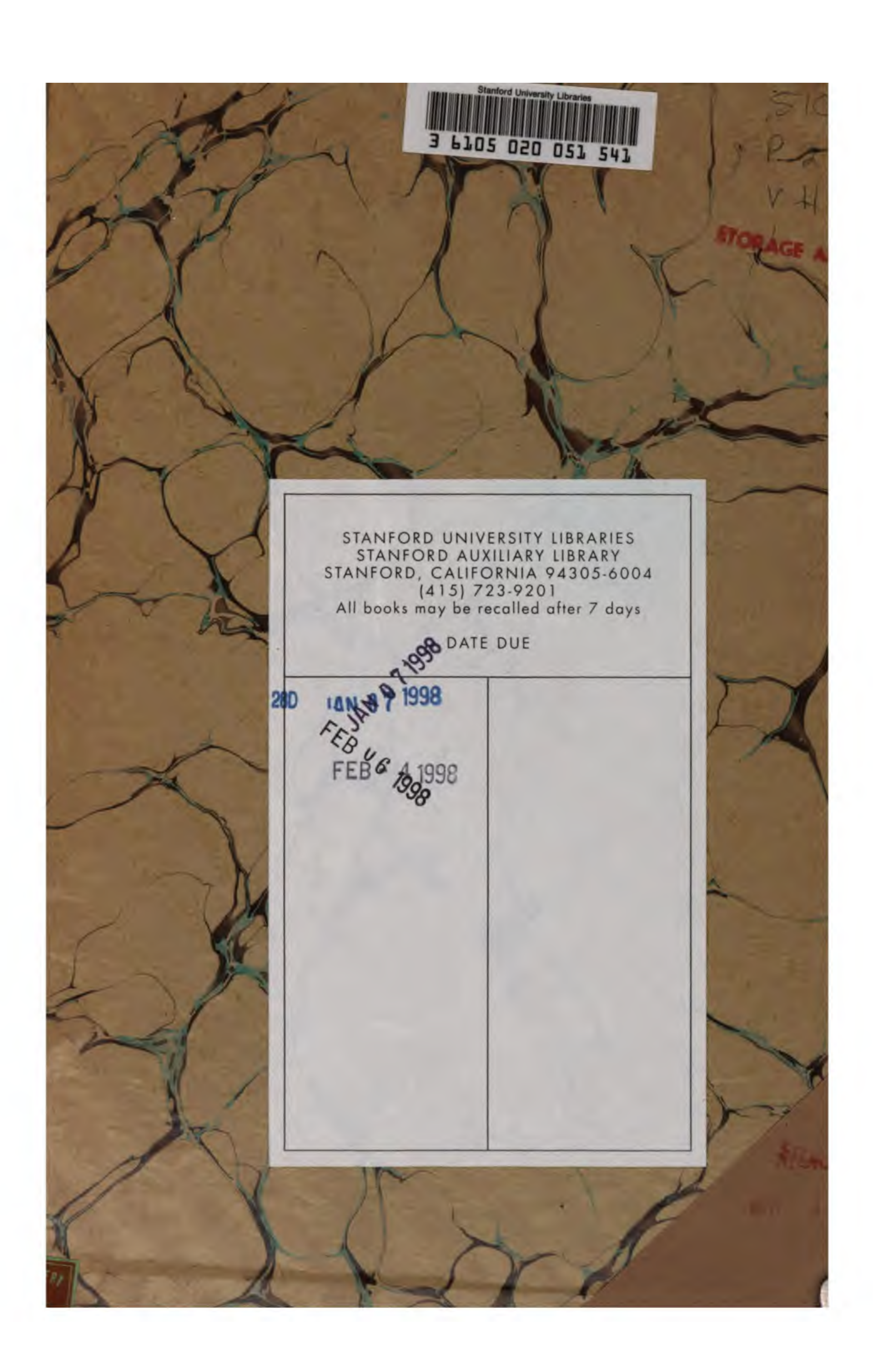
TABLE

Des Articles contenus dans le XVIII.e Cahier ou Tome XI du Journal de l'École royale polytechnique.

FIN DE LA TABLE DU TOME XI.


Fig. 1.
Fig. 5.
Fig. 6.
mètres pour Mètre.
20 Décimètres





Stanford University Libraries
3 6105 020 051 541
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE